МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

основные теоретические сведения и методические указания

к решению упражнений и практических задач

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 09.02.07

Братск 2021

Составила (разработала) Степанова И.Ф., преподаватель кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических и социально – гуманитарных дисциплин

«_____»_____________2021г. _________________________

(Подпись зав. кафедрой)

Одобрено и утверждено редакционным советом

____

(Подпись председателя РС)

«_____»_____________20__г. №_____________________

Содержание

Введение

Человек издавна использует численные методы для исследования объектов, явлений и процессов в различных областях.

Технология числовых (численных) методов требует от исследователя умения корректно ставить проблемы и задачи, прогнозировать результаты исследования, проводить разумные оценки, выбирать аналогии и математические формулировки, решать задачи с использованием компьютерных систем, проводить анализ решений.

Главная особенность обучения основам численных методов, которая все отчетливее проявляется в последние годы, связана с интенсификацией процессов использования различных специализированных математических пакетов и систем программирования вычислительных методов как инструмент решения прикладных задач. Широкое внедрение математических методов в самые разнообразные сферы профессиональной деятельности человека требуют создания и использования инструмента математического моделирования для решения вычислительных задач. Современные численные методы в совокупности с возможностью их автоматизации при использовании персональных компьютеров превращаются в такой рабочий инструмент для решения задач научного, технического, экономического характера. Развитие алгоритмов и программных средств их реализации ставит задачу обучения эффективным навыкам использования численных методов для решения практических задач, исследований.

Целью данного пособия является ознакомление студентов с математическими основами численных методов решения задач и применение этих методов для решения проблем математического моделирования систем и процессов.

Рекомендуется студентам специальностей 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах» 09.02.04 «Информационные системы» (по отраслям) при изучении дисциплин «Численные методы» , «Вычислительная математика» и студентам других специальностей как при изучении разделов «Основные численные методы», так и при подготовке к интернет – тестированию.

1 Приближенные числа и действия над ними

1.1 Источники и классификация погрешностей

Вычислительная математика – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. В более узком понимании вычислительная математика – теория численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач.

К задачам вычислительной математики относят:

- решение линейных уравнений;
- нахождение собственных значений и векторов матрицы;
- решение нелинейных уравнений;
- решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений;
- решение дифференциальных уравнений;
- решение систем дифференциальных уравнений;
- решение интегральных уравнений;
- задачи аппроксимации, интерполяции, экстраполяции.

Задача вычисления значения функции $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных из некоторого класса существует решение задачи, единственное и устойчивое по входным данным.

Источниками возникновения погрешностей численного решения задачи являются следующие:

- неточность математического описания, в частности, неточность задания начальных данных;
- неточность численного метода решения задачи.

Данная причина возникает, например, когда решение математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, что приводит к необходимости ограничения их числа, т.е. использования приближенного решения;

- конечная точность машинной арифметики.

Существуют следующие виды погрешностей:

- неустранимая погрешность;
- погрешность метода;
- вычислительная погрешность.

Неустранимая погрешность состоит из двух частей:

а) погрешности, обусловленной неточностью числовых данных, входящих в математическое описание задачи;

б) погрешности, являющейся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности (погрешность математической модели). Для вычислителя погрешность задачи следует считать неустранимой, хотя постановщик задачи иногда может ее изменить.

Результирующая погрешность определяется как сумма величин всех перечисленных выше погрешностей.

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи. Она появляется в результате замены исходной математической модели другой и/или конечной последовательностью других более простых (например, линейных) моделей. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания таких погрешностей и доведения их до сколь угодно малого уровня. Отсюда естественно отношение к погрешности метода как к устранимой (или условной).

Вычислительная погрешность (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнения арифметических операций над числами, усеченными до количества разрядов, зависящих от применяемой вычислительной техники.

1.2 Абсолютная погрешность приближенного значения числа. Граница абсолютной погрешности

Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается α

$$|x-a| = \alpha., \tag{1}$$

Число a называется приближенным значением точного числа X с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa,т.е.

$$|x-a| \le \Delta a.., \tag{2}$$

где Δa-граница абсолютной погрешности.

Существует бесконечное множество чисел Δa, удовлетворяющих приведенному определению; поэтому на практике стараются подобрать возможно меньшее и простое по записи число Δa.

По известной границе абсолютной погрешности Δa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x

$$x = a \pm \Delta a \Leftrightarrow a - \Delta a \le x \le a + \Delta a, \tag{3}$$

1.3 Верные и значащие цифры числа

Цифра m приближенного числа a называется верной в *широком смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

Цифра m приближенного числа a называется верной в *строгом смысле*, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит половины единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

В числах, полученных в результате измерений или вычислений и используемых при расчетах в качестве исходных данных, а также в десятичной записи приближенного значения числа, все цифры должны быть верными.

Граница абсолютной погрешности Δa находится непосредственно по записи приближенного значения a числа x.

Наиболее употребительна такая запись приближенного числа (например, в математических таблицах), при которой цифры верны в строгом смысле. Цифры в записи приближенного числа, о которых неизвестно, являются ли они верными, называются сомнительными.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

1.4 Округление чисел

При округлении числа a его заменяют числом с меньшим количеством значащих цифр. Абсолютная величина разности $|a - a_1|$ называется погрешностью округления.

При округлении числа до m значащих цифр отбрасывают все цифры, стоящие правее *m-й* значащей цифры, или при сохранении разрядов заменяют их нулями. При этом если первая слева из отброшенных цифр больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу. При применении этого правила погрешность округления не превосходит половины единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой. Округление приближенных значений с сохранением в записи только верных цифр производится до разряда, в котором записана первая справа верная цифра.

1.5 Относительная погрешность приближенного значения числа

Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a , т.е.

$$\delta = \frac{\alpha}{a}, \tag{4}$$

Так как абсолютная погрешность α обычно бывает неизвестна, то на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε, которое заведомо не меньше этого модуля: $|\delta| \leq$ ε. Число ε называется *границей относительной погрешности*.

Границей относительной погрешности приближенные значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}., \tag{5}$$

Зависимость относительной погрешности от числа значащих цифр иллюстрируется таблицей 1.

1.6 Таблицы погрешностей

Таблица 1 – Относительные погрешности

Число	Наи меньшее число	Наи большее число	Граница абсолют ной погреш ности	Относи тельная погреш ность наи большего числа	Относи тельная погреш ность наименьшего числа
Одно-значное	1	9	0,5	0,056=5,6%	0,5=50%
Двузнач-ное	10	99	0,5	0,005=0,5%	0,05=5%
Трех-значное	100	999	0,5	0,0005=0,05%	0,005=0,5 %
Четырех-значное	1000	9999	0,5	0,00005=0,005%	0,0005=0,05%

В ряде задач границу относительной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины: $\Delta a = |a| \cdot \varepsilon$,

1.7 Действия над приближенными значениями чисел

Над приближенными значениями чисел производятся следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. При выполнении этих действий границы абсолютной и относительной погрешности находят по формулам, представленным в таблице 2.

Таблица 2 - Погрешности алгебраических действий

Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности	Номер формулы
$y=\Delta(a+b)$	$\Delta y=\Delta a+\Delta b$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a+b}$	6
$y=\Delta(a-b)$	$\Delta y= \Delta a+\Delta b$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$	7
$y = ab$	$\Delta y = \lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$	8
$y = abc$	$\Delta y = \lvert bc\rvert \cdot \Delta a + \lvert ac\rvert \cdot \Delta b + \lvert ab\rvert \cdot$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta c}{c}$	9
$y = a^n$	$\Delta y = na^{n-1} \bullet \Delta a$	$\varepsilon_y = n\dfrac{\Delta a}{a}$	10
$y = a^2$	$\Delta y = 2a \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 2\dfrac{\Delta a}{a}$	11
$y = a^3$	$\Delta y = 3a^2 \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 3\dfrac{\Delta a}{a}$	12
$y = \sqrt{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{2a}$	13
$y = \sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{3a}$	14
$y = \dfrac{a}{b}$	$\Delta y = \dfrac{\lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$	15

1.8 Решение типовых примеров

Пример № 1. Длина детали x (см) заключена в границах $33 \leq x \leq 34$. Найти границу абсолютной погрешности детали.

Решение. Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: a = (33+34)/2 = 33,5(см). Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5(см). Величину Δa можно найти как полуразность верхней и нижней границ, т. е.

Δa = (34-33)/2 = 0,5(см). Длина детали x, найденная с точностью до Δa = 0,5(см), заключена между приближенными значениями числа x:

$33{,}5-0{,}5 \leq x \leq 33{,}5+0{,}5$; $x = 33{,}5 \pm 0{,}5$(см).

Пример № 2. Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1968 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

Решение. Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005,т.е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

Пример № 3. Указать верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $3{,}73 \pm 0{,}056$; 2) $3{,}627 \pm 0{,}0008$; 3) $4{,}732 \pm 0{,}06$; 4) $561\,274 \pm 500$.

Решение. 1) Граница погрешности Δa = 0,056 не превосходит единицы разряда десятых (неравенство 0,056<0,1 верное). Следовательно, верными являются цифры 3 и 7.

2) Так как Δa = 0,0008 <0,001, то все цифры приближенного числа 3,627 верны.

3) Поскольку Δa = 0,06 <0,1, верными являются цифры 4 и 7.

4) Так как Δa = 500 <1000, то верны цифры 5, 6 и 1.

Пример № 4. В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих измерений?

Решение. Будем считать границу абсолютной погрешности измерений равной $\pm$ 0,5 см. Найдем относительные погрешности этих измерений:

$\varepsilon = 0{,}5/16 = 0{,}0312 \approx 3{,}1$ % (при измерении длины карандаша);

$\varepsilon = 0{,}5/730 = 0{,}000685 \approx 0{,}07$ % (при измерении длины комнаты).

Следовательно, качество измерения длины комнаты значительно выше, чем качество измерения длины карандаша.

Пример № 5. Найти сумму S приближенных значений чисел $6{,}8 \pm 0{,}05;\ 4{,}3 \pm 0{,}05\ и\ 3{,}575 \pm 0{,}0005$.

Решение. Имеем

$S = 6{,}8 + 4{,}3 + 3{,}75 = 14{,}675;$

$\Delta S = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}0005 = 0{,}1005.$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0{,}05 < 0{,}1005 < 0{,}5.$ В приближенном значении суммы являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц: $S = 14{,}675 \approx 15.$

Пример № 6. Вычислить объем цилиндра $V = \pi R^2 H,$ если $R = 45{,}8\ \text{см},\ H = 78{,}6\ \text{см}.$ Указать верные цифры ответа.

Решение.

Имеем $V = \pi \cdot 45{,}8^2 \cdot 78{,}6 = 517000\ (\text{см}^3).$ Используя формулы (11) и (13) из таблицы 2 и полагая, $\pi \approx 3{,}14,$ находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{2\cdot 0{,}05}{45{,}8} + \frac{0{,}05}{78{,}6} = 0{,}0044.$$

По формуле (2) находим границу абсолютной погрешности

$V = V \cdot \varepsilon_V = 517000 \cdot 0{,}0044 = 2270\ (\text{см}^3).$

Верными цифрами являются 5 и 1.

Пример № 7. Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a = 8{,}36 \pm 0{,}005 \quad и \quad b = 3{,}72 \pm 0{,}0044.$

Решение. Имеем 8,36 / 3,72=2,25. По формуле (15) из таблицы 2 находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}005}{8{,}36} + \frac{0{,}004}{3{,}72} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

По формуле (2) находим границу абсолютной погрешности частного:

$\Delta(a/b) = 2{,}25 \cdot 0{,}002 = 0{,}0045.$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Пример № 8. Вычислить относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно $68 \pm 0{,}5.$

Решение. По формуле (13) получим

$\varepsilon_{68^2} = 2 \cdot 0{,}5 / 68 = 0{,}015 = 1{,}5\%.$

Пример № 9. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности не превышала 1 см^2? Грубое приближенное значение стороны квадрата равно 9 см.

Решение: Так как $S = a^2$, то, используя формулу (13), получим $\Delta S = 2a \cdot \Delta a,$

откуда

$$\Delta a = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{1}{2 \cdot 9} = 0{,}0556 \approx 0{,}1 \quad (см).$$

Итак, если измерить величину a с погрешностью, не превышающей 0,1см, то погрешность площади не превысит 1см^2.

1.7 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение абсолютной погрешности приближенного значения числа, запишите формулу.
2. Сформулируйте понятие границы абсолютной погрешности , запишите формулу.
3. Дайте определение относительной погрешности , запишите формулу.
4. Сформулируйте понятие границы относительной погрешности , запишите формулу.
5. Сформулируйте понятие верных цифр числа.
6. Сформулируйте понятие сомнительных цифр числа.
7. Сформулируйте понятие значащих цифр числа .
8. Перечислите способы хранения цифр в памяти ЭВМ.
9. Запишите формулу для вычисления погрешности суммы (разности) приближенных значений чисел.
10. Запишите формулу для вычисления погрешности умножения (деления) приближенных значений чисел.
11. Запишите формулу для вычисления погрешности возведения в степень приближенных значений чисел.
12. Запишите формулу для вычисления погрешности извлечения корня из приближенных значений чисел.
13. Запишите формулу для вычисления погрешности с наперед заданной точностью.
14. Сформулируйте правила округления чисел.
15. Перечислите источники погрешностей.
16. Какие виды погрешностей существуют?
17. В чем состоит неустранимая погрешность?
18. В чем заключается погрешность метода?
19. Чем обусловлена вычислительная погрешность?
20. Перечислите задачи вычислительной математики.

2 Приближенное решение уравнений

2.1 Отделение корня

Задача о нахождении приближенных значений действительных корней уравнения $f(x)=0$ предусматривает предварительное *отделение корня*, т.е. установление промежутка, в котором других корней данного уравнения нет. Предполагается, что функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$, значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах промежутка имеют разные знаки, т.е. $f(a)\cdot f(b)< 0$, и обе производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак во всем промежутке $[a,b]$.Так как действительными корнями уравнения $f(x)=0$ являются абсциссы точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью oX, то отделение корня можно произвести графически. Вместо уравнения $y=f(x)$ можно взять уравнение $y=k\cdot f(x)$, где k - постоянная величина, отличная от нуля, так как уравнения $f(x)=0$ и $kf(x)=0$ равносильны. Постоянной величиной можно распорядиться так, чтобы ординаты точек графика не были чрезмерно большими или, наоборот, чтобы график не был слишком близок к оси $0X$. Иногда бывает полезно уравнение $f(x)=0$ записать в виде $\varphi(x)=\psi(x)$. Действительными корнями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ (рисунок 1).

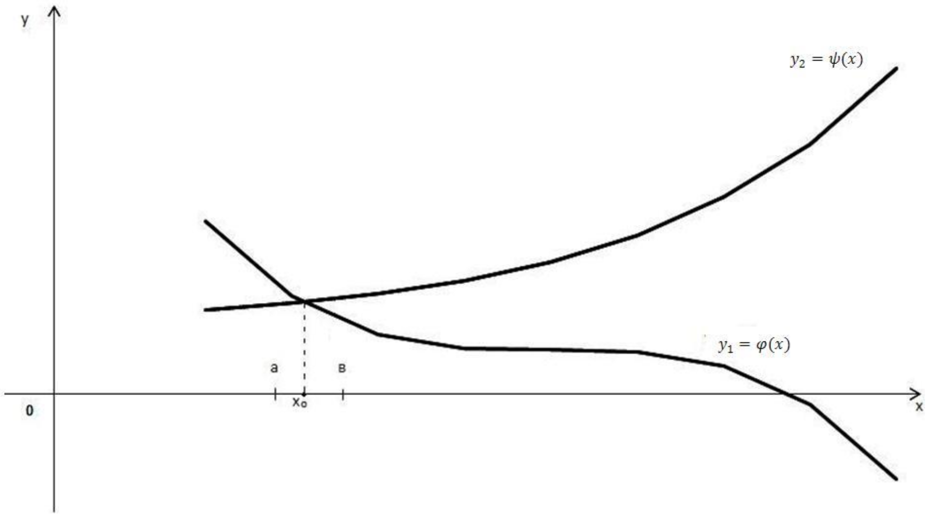

Рисунок 1 – Графическое отделение корня уравнения

2.2 Метод пропорциональных частей (метод хорд)

Требуется вычислить действительный корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на отрезке $[a,b]$, Рассмотрим график функции $y=f(x)$. Пусть $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Точки графика $A[a;f(a)]$ и $B[b;f(b)]$ соединим хордой. За приближенное значение искомого корня примем абсциссу x_1 точки пересечения хорды AB с осью $0x$. Это приближенное значение найдется по формуле

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \tag{16}$$

где x_1 принадлежит интервалу (a,b). Пусть, например, $f(x_1)<0$, тогда за новый (более узкий) интервал изоляции корня можно принять $[x_1,b]$. Соединив точки $A_1[x_1,f(x)]$ и $B[b;f(b)]$, получим в точке пересечения хорды с осью $0x$ второе приближение x_2, которое вычислим по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(a)} \tag{17}$$

и т.д. Последовательность чисел $a, x_1, x_2, \ldots$стремится к искомому корню уравнения $f(x)=0$. Вычисление приближенных значений корней уравнения следует вести до тех пор, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Если $\bar{x}$ - точный корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на отрезке $[a,b]$, а ξ - приближенное значение этого корня, найденное по способу хорд, то оценка погрешности этого приближенного значения может быть выполнена при помощи неравенства

$$|\bar{x}-\xi| < -\frac{f(a)\cdot f(b)}{2}\max_{a\le x\le b}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

2.3 Метод касательных (Ньютона)

Пусть действительный корень уравнения $f(x)=0$ изолирован на отрезке $[a,b]$. Будем предполагать, что все ограничения, сформулированные в отделении корня относительно $f(x)$, сохраняют силу и сейчас. Возьмем на отрезке $[a,b]$ такое число x_0 при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т.е. такое, что $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ (в частности, за может тот из концов отрезка

$[a,b]$, в котором соблюдено это условие). Проведем в точке $M_0[x_0; f(x_0)]$ касательную к кривой $y = f(x)$. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью $0x$. Это приближенное значение корня найдется по формуле

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}., \tag{18}$$

Применив этот прием вторично в точке $M_1[x_1; f(x_1)]$, найдем

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}., \tag{19}$$

и т.д. полученная таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2,$ имеет своим пределом искомый корень.

Для оценки погрешности приближенного значения корня, найденного по способу Ньютона, может быть использовано неравенство

$$|\bar{x} - \xi| < \frac{[f(\xi)]^2}{2} \max_{a \le x \le b} \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right|.$$

2.4 Комбинированный метод хорд и касательных

Требуется найти действительный корень уравнения $f(x) = 0$, изолированный на отрезке $[a,b]$. Предполагается, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке $[a,b]$ такую точку $0x$, что $f(x_0)$ и $f''(x_0)$, (при x , принадлежащим промежутку изоляции) имеют одинаковые знаки. Воспользуемся формулами способов хорд и касательных

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{20}$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a) f(x_0)}{f(b) - f(a)}. \tag{21}$$

Величины x_{11} и x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{22} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})},$$
$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11}) f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})}.$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси расположены между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки.

Вычислим теперь значения:

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})},$$
$$x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22} - x_{21}) f(x_{21})}{f(x_{22}) - f(x_{21})}$$

и т.д.

Каждая из последовательностей

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{31}, \ldots, x_{n1}, \ldots$$
$$\grave{e}$$
$$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}, \ldots.$$

стремится к исходному корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая монотонно убывает. Пусть, например, $x_{n1} < \bar{x} < x_{n2}$, тогда $0 < \bar{x} - x_{n-1} < x_{n2} - x_{n1}$. Задав заранее достаточно малое ε, мы можем, увеличивая n, добиться выполнения неравенства $x_{n2} - x_{n1} < \varepsilon$, следовательно, при этом же значении n будет выполняться неравенство

$$\bar{x} - x_{n1} < \varepsilon.$$

Таким образом, x_{n1} является приближенным значением корня $\bar{x}$, вычисленным с погрешностью, не превышающей ε.

Так, например, для нахождения приближенного значения $\bar{x}$ с точностью до 0,001 нужно определить n таким образом, чтобы значения x_{n1} и n_{n2}, вычисленные с точностью до 0,001, совпадали.

2.5 Метод итераций

Если данное уравнение приведено к виду $x=\varphi(x)$, где $|\varphi'(x)|\le r<1$ всюду на отрезке $[a,b]$, на котором исходное уравнение имеет единственный корень, то исходя из некоторого начального значения x_0, принадлежащего отрезку $[a,b]$, можно построить такую последовательность:

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\ldots,x_n=\varphi(x_{n-1}.)$$

Пределом последовательности $x_1,x_2,\ldots,x_n$ является единственный корень уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a,b]$. Погрешность приближенного значения x_n корня $\bar{x}$, найденного методом итерации, оценивается неравенством

$$|\bar{x}-x_n|<\frac{r}{1-r}|x_n-x_{n-1}|.$$

Для нахождения приближенного значения корня с погрешностью, не превышающей ε, достаточно n определить так, чтобы выполнялось неравенство

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{r-1}{r}\varepsilon.$$

2.6 Метод проб (метод половинного деления, дихотомии, бисекции)

Интервал изоляции действительного корня всегда можно уменьшить путем деления его, например, пополам определяя на границах, в какой из частей первоначального интервала функция меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т.д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться сохраняемые в ответе десятичные знаки.

2.7 Решение типовых примеров

Пример №10. Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4-2x-4=0$ с точностью до 0,01.

Решение. Найдем отрезок [a;b], содержащий искомый корень. Для этого уравнение запишем в виде

$x^4=2x+4.$

Построим графики функций $\varphi(x)=x^4$ и $\psi(x)=2x+4$ (рисунок 2).

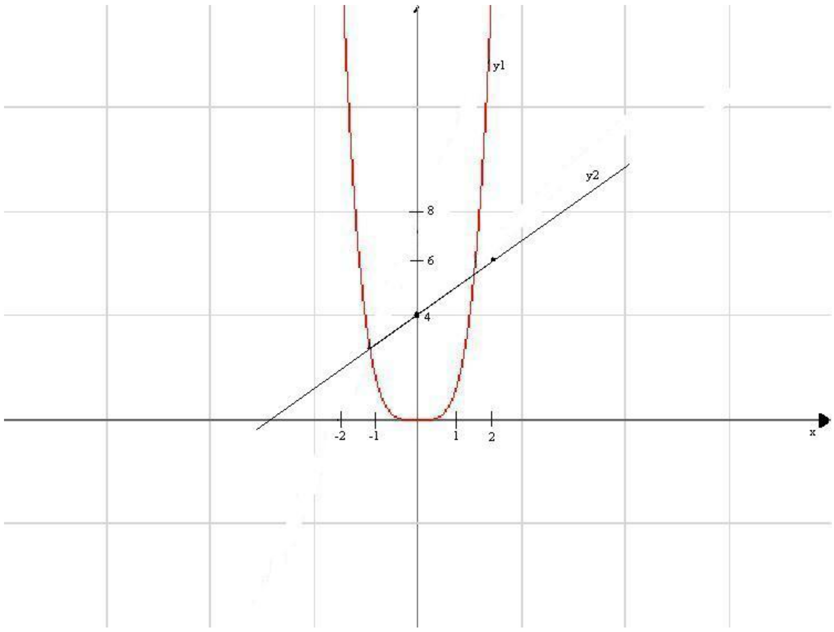

Рисунок 2 – Графическое отделение корня уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$

Положительный корень будет находиться в промежутке (1; 1,7), так как $f(1) = -5 < 0$, *а* $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$.

Найдем первое приближенное значение корня по формуле (16):

$$x_1 = 1 - \frac{(1{,}7-1)f(1)}{f(1{,}7) - f(1)} = 1{,}588.$$

Так как $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, то применяем вторично способ хорд к промежутку (1,588; 1,7):

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{(1{,}7-1{,}588)f(1{,}588)}{f(1{,}7) - f(1{,}588)} = 1{,}639,$$

$$f(1{,}639) = -0{,}051 < 0.$$

Найдем третье приближенное значение:

$$x_3 = 1{,}639 - \frac{(1{,}7-1{,}639)f(1{,}639)}{f(1{,}7) - f(1{,}639)} = 1{,}642,$$

$$f(1{,}642) = -0{,}016 < 0.$$

Найдем четвертое приближенное значение:

$$x_4 = 1{,}642 - \frac{(1{,}7-1{,}642)f(1{,}642)}{f(1{,}7) - f(1{,}642)} = 1{,}643;$$

$$f(1{,}643) = 0{,}004 > 0.$$

Сотые доли последних значений корней одинаковы.

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64.

Составим *алгоритм решения алгебраического уравнения методом хорд*.

1. Отделить корень (графически и/или аналитически), т.е. найти интервал $[a; b]$ изоляции корня.

2. Проверить условие $f(a) \cdot f(b) < 0$.

3. Если возможно, то искусственно уменьшить интервал изоляции корня (это позволит быстрее достичь результата).

4. Найти приближение корня.

5. Составить новый интервал изоляции.

Вернуться к пункту 2. Процесс продолжить до тех пор, пока приближения корней не совпадут с указанной точностью.

Пример №11. Предыдущий пример решить методом касательных.

Решение.

Здесь $f(x) = x^4 - 2x - 4,\ f'(x) = 4x^3 - 2,\ f''(x) = 12x^2$. Так как $f(x)$ и $f''(x)$ при $x_0 = 1{,}7$ имеют один и тот же знак, а именно: $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0\ и\ f''(1{,}7) > 0$, то воспользуемся формулой (18):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

где $f'(1{,}7) = 4 \cdot 1{,}7^3 - 2 = 17{,}652$. Тогда

$$x_1 = 1{,}7 - \frac{0{,}952}{17{,}652} = 1{,}646.$$

Применим второй раз способ касательных:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

$$f(x_1) = f(1{,}646) = 0{,}048,\ f'(1{,}646) = 15{,}838;$$

$$x_2 = 1{,}646 - \frac{0{,}048}{15{,}838} = 1{,}643;$$

$$f(1{,}643) = 0{,}004,\ f'(1{,}643) = 15{,}740;$$

$$x_3 = 1{,}643 - \frac{0{,}004}{15{,}740} = 1{,}6427.$$

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64.

Составим *алгоритм решения алгебраического уравнения методом касательных*.

1. Отделить корень (графически/или аналитически), т.е. найти интервал $[a; b]$ изоляции корня.

2. За x_0 взять тот конец отрезка, в котором соблюдается условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

3. Найти первое приближение корня.

4. Найти второе приближение корня.

Процесс продолжить до тех пор, пока приближения корней не совпадут с указанной точностью.

Пример №12. Комбинируя способы хорд и касательных, найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + x^2 - 11 = 0$, изолированного в промежутке (1,2), с точностью до 0,001.

Решение.

Имеем $f(x) = x^3 + x^2 - 11,\ f'(x) = 3x^2 + 2x,\ f''(x) = 6x + 2$. В указанном промежутке $f''(x) > 0$, поэтому за первое приближение в способе касательных берем $x_0 = 2$, так как $f(2) = 1 > 0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94;$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9.$$

Искомый корень принадлежит промежутку (1,9; 1,94):

$f(1{,}9) = -0{,}531;\ f(1{,}94) = 0{,}065;\ f'(1{,}94) = 15{,}172;$

$$x_{21} = 1{,}94 - \frac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936;$$

$$x_{22} = 1{,}9 - \frac{0{,}04(-0{,}531)}{0{,}065 + 0{,}531} = 1{,}936.$$

Так как значения x_{21} *и* x_{22}, вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенное значение корня $\bar{x}$, вычисленное с точностью до 0,001, есть 1,936.

Составим *алгоритм решения алгебраического уравнения комбинированным методом хорд и касательных*.

1. Отделить корень (графически/или аналитически), т.е. найти интервал $[a; b]$ изоляции корня.
2. Проверить условие $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Проверить условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.
4. Найти x_{11} и x_{12}.
5. Найти x_{21} и x_{22}.

Процесс продолжить до тех пор, пока приближения корней x_{1j} и x_{j2} не совпадут с указанной точностью.

Пример №13. Способом итерации найти приближенное значение корня уравнения $2 - 1gx - x = 0$ с точностью до 0,001.

Решение. Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения. Представим данное уравнение в виде $\lg x = -x + 2$ и построим графики функций $y = \lg x$ *и* $y = -x + 2$.

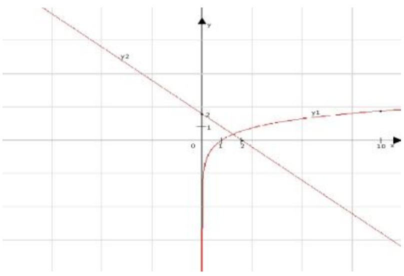

Рисунок 3 - Графическое отделение корня уравнения $2 - 1gx - x = 0$

Точка М пересечения данных графиков имеет абсциссу в промежутке от 1 до 2, поэтому за начальное значение $\bar{x}$ можно взять $x_0 = 1$ (рисунок 3).

Запишем исходное уравнение в виде $x = 2 - \lg x$.

Здесь

$\varphi(x) = 2 - \lg x, \varphi'(x) = -\dfrac{\lg x}{x},$

$|\varphi'(x)| < 1$ в промежутке $1 \le x \le 2$ и поэтому способ итераций применим. Найти теперь первое приближенное значение:

$x_1 = 2 - \lg x_0 = 2 - \lg 1 = 2.$

Найдем второе и последующие приближения:

$x_2 = 2 - \lg x_1 = 2 - \lg 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990;$

$x_3 = 2 - \lg 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698;$

$x_4 = 2 - \lg 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520;$

$x_5 = 2 - \lg 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565;$

$x_6 = 2 - \lg 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555;$

$x_7 = 2 - \lg 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556.$

Таким образом, искомый корень $x \approx 1{,}755$.

Пример № 14. Способом итерации найти приближенное значение корня уравнения $3^x – 6x = 0$ с точностью до 0,001.

Решение. Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения. Представим данное уравнение в виде $3^x = 6x$. Постройте графики функций самостоятельно.

Прологарифмируем уравнение: $\ln 3^x = \ln 6x$.

По свойствам логарифмов $x \ln 3 = \ln 6x$.

Выразим x: $x = \dfrac{\ln 6x}{\ln 3}$.

Тогда $\varphi(x) = \dfrac{\ln 6x}{\ln 3}$.

Найдем производную $\varphi'(x) = \left(\dfrac{\ln 6x}{\ln 3}\right)' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot (\ln 6x)' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{(6x)'}{6x} = \dfrac{1}{x\ln 3}$.

$|\varphi'(x)| < 1$ в промежутке $[2; 3]$.

Вычисляем корень уравнения по формуле $x = \dfrac{\ln 6x}{\ln 3}$.

За первое приближение берем $x_0 = 3$:

$x_1 = \dfrac{\ln(6 \cdot 3)}{\ln 3} = \dfrac{\ln 18}{\ln 3} = \dfrac{2{,}89}{1{,}099} = 2{,}63;$

$x_2 = \dfrac{\ln(6 \cdot 2{,}63)}{\ln 3} = \dfrac{\ln 15{,}778}{\ln 3} = \dfrac{2{,}759}{1{,}099} = 2{,}51;$

$x_3 = \dfrac{\ln(6 \cdot 2{,}51)}{\ln 3} = \dfrac{\ln 15{,}06}{\ln 3} = \dfrac{2{,}712}{1{,}099} = 2{,}468;$

$x_4 = \frac{\ln(6 \cdot 2{,}468)}{\ln 3} = \frac{\ln 14{,}806}{\ln 3} = \frac{2{,}695}{1{,}099} = 2{,}452;$

$x_5 = \frac{\ln(6 \cdot 2{,}452)}{\ln 3} = \frac{\ln 14{,}712}{\ln 3} = \frac{2{,}689}{1{,}099} = 2{,}446;$

$x_6 = \frac{\ln(6 \cdot 2{,}446)}{\ln 3} = \frac{\ln 14{,}679}{\ln 3} = \frac{2{,}686}{1{,}099} = 2{,}444;$

$x_7 = \frac{\ln(6 \cdot 2{,}444)}{\ln 3} = \frac{\ln 14{,}666}{\ln 3} = \frac{2{,}686}{1{,}099} = 2{,}444.$

Приближения корня совпадают с указанной точностью.

Ответ: x = 2,444.

Составим *алгоритм решения алгебраического уравнения методом итераций.*

1. Отделить корень (графически/или аналитически), т.е. найти интервал $[a; b]$ изоляции корня.

2. Исходное уравнение записать в виде $x = \varphi(x)$.

3. Проверить, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условию $|\varphi'(x)| < 1$ в интервале изоляции корня.

4. Найти последовательно приближения x_1 , x_2 и т. д. по формуле $x = \varphi(x)$, пока x_i не начнет совпадать x_{i+1} с указанной точностью.

Пример №15. Способом проб решить уравнение $x^3 + 2x - 7 = 0$ с точностью до 0,01.

Решение.

Интервал изоляции действительных корней можно определить графически, построив графики функций $y = x^3$ *и* $y = -2x + 7$.

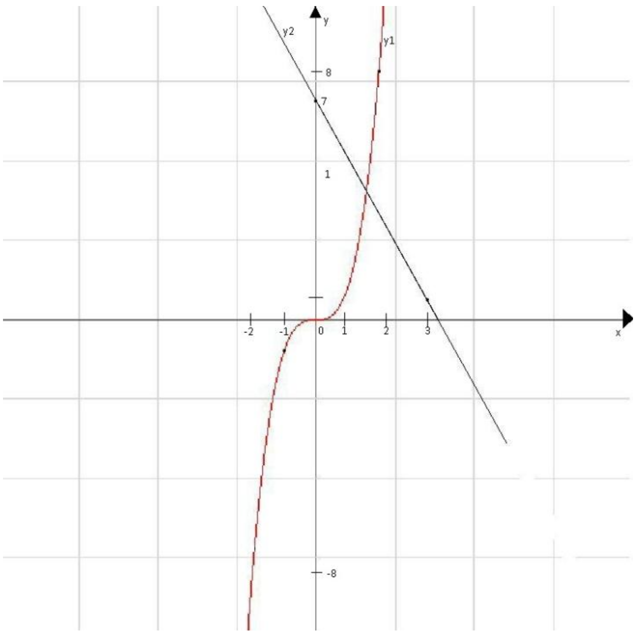

Рисунок 4 - Графическое отделение корня уравнения $x^3 + 2x - 7 = 0$

Единственная точка пересечения графиков лежит в интервале $1 < x < 2$. Следовательно, искомый корень находится в интервале (1, 2), т.е. можно принять $a = 1, b = 2$. Значение функции $f(x)$ при $x = 1$: $f(1) = -4 < 0;$ *при* $x = 2$: $f(2) = 5 > 0$. Разделим интервал (1, 2) пополам:

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

и вычислим $f(c_1) = f(1{,}5) = -0{,}625 < 0$. Следовательно, искомый корень находиться в интервале (1,5; 2).

Примем

$$c_2 = 1{,}7;\ f(c_2) = f(1{,}7) = 1{,}313 > 0.$$

Мы видим, что искомый корень находится в интервале (1,5; 1,7). Примем

$$c_3 = 1{,}6;\ f(c_3) = f(c_3) = f(1{,}6) = 0{,}296 > 0.$$

В результате интервал изоляции удалось сузить, и искомый корень находится в интервале (1,5; 1,6). Продолжая этот процесс, примем

$$c_4 = 1{,}55;\ f(c_4) = f(1{,}55) = -0{,}176 < 0.$$

Интервалом изоляции корня будет (1,55; 1,6).

Пусть

$$c_5 = 1{,}57;\ f(c_5) = f(1{,}57) = 0{,}010 > 0$$

и искомый корень находится в интервале (1,55; 1,57);

$$c_6 = 1{,}56;\ f(c_6) = f(1{,}56) = -0{,}084 < 0,$$

интервал изоляции корня (1,56; 1,57);

$$c_7 = 1{,}565;\ f(c_7) = f(1{,}565) = -0{,}037 < 0,$$

интервал изоляции (1,565; 1,57);

$$c_8 = 1{,}568;\ f(c_8) = f(1{,}568) = -0{,}009 < 0.$$

Таким образом, мы пришли к интервалу (1,568; 1,57). Отсюда видно, что с точностью до 0,01 искомый корень $x = 1{,}57$.

Алгоритм решения алгебраического уравнения методом проб составьте самостоятельно.

2.8 Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте этапы графического отделения корня уравнения.
2. Запишите правило, которому должны удовлетворять корни уравнения.
3. В чем заключается суть метода половинного деления в приближенном решении уравнений?
4. Запишите алгоритм решения уравнения методом касательных.
5. Запишите алгоритм решения уравнения методом хорд.

6. Запишите алгоритм решения уравнения комбинированным методом хорд и касательных.

7. Запишите алгоритм решения уравнения методом итераций.

8. При каком условии применим метод итераций?

9. Запишите алгоритм решения уравнения методом проб.

10. Какое условие для границ интервала изоляции корня должно выполняться при решении уравнения методом хорд?

11. Какое условие для границ интервала изоляции корня должно выполняться при решении уравнения методом касательных?

12. Какие условия для границ интервала изоляции корня должны выполняться при решении уравнения комбинированным методом хорд и касательных?

14. Какое условие для функции $\varphi(x)$ должно выполняться при решении уравнения методом итераций?

15. Как искусственно уменьшить интервал изоляции корня?

3 Вычисление определителей методом Гаусса и нахождение обратной матрицы

3.1 Вычисление определителей методом Гаусса

Если матрицу свести к треугольному виду, то ее определитель будет равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения элементов определителя.

Суть метода Гаусса состоит в сведении определителя матрицы к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы (определителя) относятся:

1) умножение любой строки матрицы (определителя) на число k, не равное нулю;

2) сложение любых строк матрицы (определителя);

3) перестановка местами двух строк матрицы (определителя);

4) отбрасывание строки матрицы (определителя), в которой все коэффициенты равны нулю.

Пример № 16. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ методом Гаусса.

Решение.

1. Для удобства вычислений поменяем строки местами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Умножим 2-ую строку на (5). Умножим 3-ую строку на (-4). Добавим 3-ую строку к 2-ой. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 49 & -12 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.Умножим 1-ую строку на (49). Умножим 2-ую строку на (-4). Добавим 2-ую строку к 1-ой. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 97 \\ 0 & 49 & -12 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы (число линейно независимых строк) равен r = 3.

Определитель матрицы detA = 97 • 49 • 5 / 245 = 97,

где z = (5) • (49) = 245 - произведение чисел, на которые умножали строки матрицы при приведении к треугольному виду.

Ответ: 97.

Пример № 17. Вычислить определитель матрицы**.**

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -41/2 & 8 \\ 0 & 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 107/4 \end{pmatrix}$$

Преобразования Гаусса выполните самостоятельно.

Теперь чтобы вычислить определитель приведённой матрицы, нужно перемножить все элементы, стоящие на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -41/2 & 8 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 107/4 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 \cdot 18 \cdot \frac{107}{4} = \mathbf{-1926}$$

Ответ: -1926.

3.2 Нахождение обратной матрицы методом Жордана-Гаусса

Нахождение обратной матрицы методом Жордана-Гаусса относится к точным (прямым) методам.

Возьмём две матрицы: саму А и единичную Е. Приведём матрицу А к единичной матрице методом Жордана-Гаусса. После применения каждой операции к первой матрице применим ту же операцию ко второй. Когда приведение первой матрицы к единичному виду будет завершено, вторая матрица окажется равной A^{-1}.

Пример № 18.

Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение. Припишем к матрице А соответственную единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Последовательно будем выбирать разрешающий элемент РЭ, который лежит на главной диагонали матрицы. Разрешающий элемент равен 4. На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули. Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца B, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ:

НЭ = СЭ - (А·В)/РЭ

РЭ - разрешающий элемент (4), А и В - элементы матрицы, образующие прямоугольник с элементами СЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 3.

Таблица 3 – Первый расчет примера № 16

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4 / 4 = 1	3 / 4 = 0.75	2 / 4 = 0.5	1 / 4 = 0.25	0 / 4 = 0	0 / 4 = 0
$4-\frac{4\cdot 4}{4}=0$	$0-\frac{3\cdot 4}{4}=-3$	$-1-\frac{2\cdot 4}{4}=-3$	$0-\frac{1\cdot 4}{4}=-1$	$1-\frac{0\cdot 4}{4}=1$	$0-\frac{0\cdot 4}{4}=0$
$3-\frac{4\cdot 3}{4}=0$	$2-\frac{3\cdot 3}{4}=-0.25$	$3-\frac{2\cdot 3}{4}=1.5$	$0-\frac{1\cdot 3}{4}=-0.75$	$0-\frac{0\cdot 3}{4}=0$	$1-\frac{0\cdot 3}{4}=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 1{,}5 & -0{,}75 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий элемент равен -3. На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули. Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца В, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ. Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 4.

Таблица 4 –Второй расчет примера № 16

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$1-\frac{0\cdot 0.75}{-3}=1$	$0.75-\frac{-3\cdot 0.75}{-3}=0$	$0.5-\frac{-3\cdot 0.75}{-3}=-0.25$	$0.25-\frac{-1\cdot 0.75}{-3}=0$	$0-\frac{1\cdot 0.75}{-3}=0.25$	$0-\frac{0\cdot 0.75}{-3}=0$
0 / -3 = 0	-3 / -3 = 1	-3 / -3 = 1	-1 / -3 = 0.33	1 / -3 = -0.33	0 / -3 = 0
$0-\frac{0(-0.25)}{-3}=0$	$-0.25-\frac{-3(-0.25)}{-3}=0$	$1.5-\frac{-3(-0.25)}{-3}=1.75$	$-0.75-\frac{-1(-0.25)}{-3}=-0.67$	$0-\frac{1(-0.25)}{-3}=-0.08$	$1-\frac{0(-0.25)}{-3}=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}33 & -0{,}33 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}75 & -0{,}67 & -0{,}0833 & 1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий элемент равен 1,75.

На месте разрешающего элемента получаем 1, а в самом столбце записываем нули. Все остальные элементы матрицы, включая элементы столбца В, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 5.

Таблица 5 –Третий расчет примера № 16

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$1-\frac{0(-0.25)}{1.75}=1$	$0-\frac{0(-0.25)}{1.75}=0$	$-0.25-\frac{1.75(-0.25)}{1.75}=0$	$0-\frac{-0.67(-0.25)}{1.75}=-0.1$	$0.25-\frac{-0.0833(-0.25)}{1.75}=0.24$	$0-\frac{1(-0.25)}{1.75}=0.14$
$0-\frac{0\cdot 1}{1.75}=0$	$1-\frac{0\cdot 1}{1.75}=1$	$1-\frac{1.75\cdot 1}{1.75}=0$	$0.33-\frac{-0.67\cdot 1}{1.75}=0.72$	$-0.33-\frac{-0.0833\cdot 1}{1.75}=-0.29$	$0-\frac{1\cdot 1}{1.75}=-0.57$
$0 / 1.75 = 0$	$0 / 1.75 = 0$	$1.75 / 1.75 = 1$	$-0.67 / 1.75 = -0.38$	$-0.0833 / 1.75 = -0.05$	$1 / 1.75 = 0.57$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}0952 & 0{,}24 & 0{,}14 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}71 & -0{,}29 & -0{,}57 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}38 & -0{,}0476 & 0{,}57 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -0{,}0952 & 0{,}24 & 0{,}14 \\ 0{,}71 & -0{,}29 & -0{,}57 \\ -0{,}38 & -0{,}0476 & 0{,}57 \end{pmatrix}.$$

Проверить правильность результата можно по свойству

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$,

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3 Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определителем второго порядка?

2.Запишите вычисление определителя второго порядка.

3.Перечислите и проиллюстрируйте примерами известные Вам свойства определителей.

4.Что такое определитель третьего порядка?

5.Запишите в общем виде формулу разложения определителя по элементам его третьей строки и проиллюстрируйте ее на конкретном примере.

6. Изложите метод Гаусса для вычисления определителей любого порядка.

7. Изложите суть метода Гаусса для нахождения обратной матрицы.

8. Запишите формулу Жордана – Гаусса для нахождения обратной матрицы.

9. Перечислите другие способы нахождения обратной матрицы.

10. Проведите сравнительный анализ способов нахождения обратной матрицы (укажите достоинства и недостатки каждого).

4 Приближенное решение систем линейных алгебраических уравнений

Многие задачи практики сводятся к необходимости решения системы линейных уравнений. При конструировании инженерных сооружений, обработке результатов измерений, решении задач планирования производственного процесса и ряда других задач техники, экономики, научного эксперимента приходится решать системы линейных уравнений.

Итерация – это повторение или результат применения какой – либо математической операции.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений отличаются самоисправляемостью и простотой реализации на ЭВМ. Итерационные методы требуют задания начальных приближений. Сходимость итерационных методов зависит от свойств матрицы системы и выбора начальных приближений.

Рассматривается следующая система:

$$Ax = f, \qquad (22)$$

где $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ $i, j = 1,2,\ldots,m,$ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$.

Здесь x_1, $x_2,\ldots,x_n$ – неизвестные, которые надо определить; a_{ij}- коэффициенты системы; f_i - свободные члены системы (предполагаются известными). Первый индекс обозначает номер строки, второй индекс обозначает номер столбца.

Система называется однородной, если все ее свободные члены равны нулю. Система называется квадратной, если количество уравнений равно числу неизвестных.

Решение системы – совокупность чисел c_1, $c_2,\ldots,c_n$, таких, что подстановка каждого из них вместо неизвестных обращает все уравнения в тождества.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее нет ни одного решения. Совместная система может иметь одно или более решений.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение; если же у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной.

Существуют следующие методы решения систем линейных алгебраических уравнений (рассмотрены в дисциплине «Элементы высшей математики»):

- метод определителей (метод Крамера);
- матричный метод;
- метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

4.1 Метод итераций

Перед применением метода итераций систему необходимо привести к эквивалентному виду

$$x = Bx + C, \qquad (23)$$

Метод итераций для системы (22) имеет вид

$$x^{n+1} = Bx^n + C.$$

Теорема. *Если* $\|B\| < 1$, *где* $\|B\| = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{m} |a_{ik}|$ *то метод итераций сходится при любом начальном приближении* x^0 *со скоростью геометрической прогрессии.*

В качестве начального приближения обычно выбирается вектор свободных членов C, тогда для оценки числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, можно использовать формулу

$$\|x^n - x\| \le \frac{\|B\|^{n+1}}{1 - \|B\|} \|C\| \quad , \tag{24}$$

Пример № 19. *Методом итераций решить систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}08x_4 + 2{,}15, \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}16x_2 - 0{,}28x_3 - 0{,}06x_4 - 0{,}83, \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}12x_4 + 1{,}16, \\ x_4 = -0{,}21x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}44, \end{cases}$$

предварительно оценив число необходимых для этого шагов, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Число шагов, дающих ответ с точностью до 0,001, определим из соотношения (24). Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}32 & -0{,}05 & 0{,}11 & -0{,}08 \\ 0{,}11 & 0{,}16 & -0{,}28 & -0{,}06 \\ 0{,}08 & -0{,}15 & 0 & 0{,}12 \\ -0{,}21 & 0{,}13 & -0{,}27 & 0 \end{pmatrix},$$

$\|B\| = \max\{0{,}56;\ \ 0{,}61;\ \ 0{,}35;\ \ 0{,}61\} = 0{,}61 < 1$; значит, итерационный процесс сходится;

$$C = (2{,}15 \quad -0{,}83 \quad 1{,}16 \quad 0{,}44)^T,$$

$\|C\| = 2{,}15$. Имеем

$$\frac{0{,}61^{\kappa+1}}{0{,}39} \cdot 2{,}15 < 0{,}001; \quad 0{,}61^{k+1} < \frac{0{,}001 \cdot 0{,}39}{2{,}15};$$

$$(k+1) \cdot \lg 0{,}61 < -3 + \lg 0{,}39 - \lg 2{,}15; \quad k + 1 > \frac{3{,}7413}{0{,}2147} \approx 17{,}5; \quad k \ge 17.$$

В качестве нулевого приближения выбираем вектор С.

Итерации вычисляются по формулам:

$$
\begin{cases}
x_1^{n+1} = 0{,}32x_1^n - 0{,}05x_2^n + 0{,}11x_3^n - 0{,}08x_4^n + 2{,}15, \\
x_2^{n+1} = 0{,}11x_1^n + 0{,}16x_2^n - 0{,}28x_3^n - 0{,}06x_4^n - 0{,}83, \\
x_3^{n+1} = 0{,}08x_1^n - 0{,}15x_2^n + 0{,}12x_4^n + 1{,}16, \\
x_4^{n+1} = -0{,}21x_1^n + 0{,}13x_2^n - 0{,}27x_3^n + 0{,}44,
\end{cases}
$$

Вычисления расположим в таблице 6.

Таблица 6 – Расчет итераций

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	-0,83	1,16	0,44
1	2,9719	-1,0775	1,5093	-0,4326
2	3,3555	-1,0721	1,5075	-0,7317
3	3,5017	-0,0106	1,5015	-0,8111
4	3,5511	-0,9277	1,4944	-0,8312
5	3,5637	-0,9563	1,4834	-0,8298
6	3,5678	-0,9566	1,4890	-0,8332
7	3,5700	-0,9575	1,4889	-0,8356
8	3,5709	-0,9573	1,4890	-0,8362
9	3,5712	-0,9571	1,4889	-0,8364
10	3,5713	-0,9570	1,4890	-0,8364

Ответ: $x_1 = 3{,}5713$, $x_2 = -0{,}957$, $x_3 = 1{,}489$, $x_4 = -0{,}8364$.

4.2 Метод Якоби

Метод Якоби для системы (22) в координатной форме имеет вид

$$x_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^n - f_i\right), \quad i = 1,\mathrm{K}\ ,m$$

Теорема. *Пусть A - матрица с диагональным преобладанием, то есть*

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq i} | a_{ij} | .$$

Тогда метод Якоби сходится.

Если систему (22) представить в виде (23), то можно оценить количество итераций по формуле (24).

Пример № 20. *Методом Якоби решить систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1 - 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 = 1 & (\mathrm{I}) \\ 3x_1 + 2x_2 - 1{,}1x_3 = 0 & (II) \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0 & (III) \end{cases}$$

предварительно приведя матрицу системы к матрице с диагональным преобладанием и оценить число необходимых шагов для достижения точности 0,001.

Решение.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 25x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 5 & (5\mathrm{I} + 5\mathrm{II}) \\ -9{,}4x_2 + 3{,}4x_3 = 3 & (3I - 2II) \\ x_1 - x_2 + 7{,}3x_3 = 0 & (III) \end{cases}$$

Для оценки числа итераций запишем эту систему в виде (23), поделив каждое уравнение на диагональный элемент:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}04x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}2 \\ x_2 = 0{,}36x_3 - 0{,}32 \\ x_3 = 0{,}14x_2 - 0{,}14x_1 \end{cases}$$

Число шагов, дающих ответ с точностью до 0,001, определяется из соотношения (23). Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}04 & 0{,}14 \\ 0 & 0 & 0{,}36 \\ 0 & 0{,}14 & 0{,}14 \end{pmatrix},$$

$\|B\| = \max\{0{,}18; \quad 0{,}36; \quad 0{,}28\} = 0{,}36$;

$$C = (-0{,}2 \quad -0{,}32 \quad 0)^T,$$

$\|C\| = 0{,}32$. Имеем

$$\frac{0{,}36^{к+1}}{0{,}64}\cdot 0{,}32<0{,}001\ ;\quad 0{,}36^{k+1}<\frac{0{,}001\cdot 0{,}64}{0{,}32}\ ;\quad (k+1)\cdot\lg 0{,}36<-3+\lg 0{,}64-\lg 0{,}32\ ;$$

$$k>5.$$

Нулевое приближение $x^0=C$;

Вычислим первое приближение

$$x_i^1=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j^0-f_i\right)\ x_1^1=i=1{,}2$$

где a_{ij} - элементы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}25 & 1 & -3{,}5\\ 0 & -9{,}4 & 3{,}4\\ 1 & -1 & 7{,}3\end{pmatrix},$$

а f_i - элементы вектора $f=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\end{pmatrix}^T$.

$$x_1^1=-\frac{1}{25}\left(x_2^0-3{,}5x_3^0-f_1\right),\qquad x_1^1=-0{,}2128\ .$$

$$x_2^1=\frac{1}{9{,}4}\left(3{,}4x_3^0-f_2\right),\qquad x_2^1=-0{,}3192\ .$$

$$x_3^1=-\frac{1}{7{,}3}\left(x_1^0-x_2^0-f_3\right),\qquad x_3^1=-0{,}0164\ .$$

Для окончания вычислений нужно произвести 6 итераций.

4.3. Метод простой итерации

Метод простой итерации для системы (1) имеет вид

$$x^{n+1}=(E-\tau A)x^n+\tau f$$

или в канонической форме

$$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}-Ax^n=f\ ,$$

где $\tau>0$ - постоянный итерационный параметр.

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод простой итерации сходится при* $0<\tau<\dfrac{2}{\lambda_{\max}}$.

Теорема. *Если $\|B\|<1$, где $B=(E-\tau A)$, то метод простой итерации сходится.*

Пример № 21. *Пусть матрица А системы уравнений имеет вид*

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix},$$

тогда

$$B=\begin{pmatrix}1-4\tau & \tau & 0\\ \tau & 1-3\tau & -\tau\\ 0 & -2\tau & 1-6\tau\end{pmatrix};$$

$\|B\|_\infty = \max\{1-3\tau \quad 1-\tau \quad 1-4\tau\}$. (складываются модули элементов в каждой строке)

Выберем τ так, чтобы выполнялось условие сходимости $\|B\| < 1$.

$$\tau = \frac{1}{9}.$$

Число итераций, необходимое для заданной точности, можно вычислить как в случае метода итераций.

4.4 Метод Зейделя

Итерационный метод Зейделя для системы (22) в координатной форме имеет вид

$$x_k^{n+1} = \frac{1}{a_{kk}}\left(f_k - \sum_{j>k} a_{kj}x_j^n - \sum_{j<k} a_{kj}x_j^{n+1}\right), \quad k = 1,\ldots,m$$

Теорема. *Если A - матрица с диагональным преобладанием, тогда метод Зейделя сходится для любого начального приближения.*

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод Зейделя сходится.*

Пример №22.

Методом Зейделя решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений

$$\begin{cases}4{,}5x_1 - 1{,}8x_2 + 3{,}6x_3 = -1{,}7 & (\mathrm{I})\\ 3{,}1x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}2x_3 = 3{,}6 & (II)\\ 1{,}8x_1 + 2{,}5x_2 + 4{,}6x_3 = 2{,}2 & (III)\end{cases},$$

приведя ее к виду, удобному для итераций.

Решение.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 & (\mathrm{I}+\mathrm{II}) \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 & (2III + II - I) \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 & (III - II) \end{cases}$$

Нулевое приближение $x^0 = (1{,}9 \quad 9{,}7 \quad -1{,}4)^T$.

Первое приближение

$$x_1^1 = \frac{1}{7{,}6}(1{,}9 - 0{,}5*9{,}7 + 2{,}4*1{,}4) = 0{,}0539$$

$$x_2^1 = \frac{1}{9{,}1}(9{,}7 + 4{,}4*1{,}4 - 2{,}2*0{,}0539) = 1{,}7298$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5{,}8}(-1{,}4 + 1{,}3*0{,}0539 - 0{,}2*1{,}7298) = -0{,}289$$

и т.д.

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1 \le i \le m} \left| x_i^{n+1} - x_i^n \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное число.

4.5 Метод верхней релаксации

Метод верхней релаксации является обобщением метода Зейделя. В координатной форме метод верхней релаксации имеет следующий вид

$$x_i^{n+1} + \omega \sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} = (1-\omega) x_i^n - \omega \sum_{j>i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \omega \frac{d_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, m$$

При $\omega = 1$ этот метод совпадает с методом Зейделя.

Теорема. *Если A - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод верхней релаксации сходится при* $0 < \omega < 2$.

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1 \le i \le m} \left| x_i^{n+1} - x_i^n \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное число.

4.6 Метод минимальных невязок

Метод минимальных невязок определен для систем уравнений с симметричной положительно определенной матрицей A. Этот метод определяется формулой

$$x^{n+1} = x^n - \tau_{n+1} \left(Ax^n - f \right),$$

где параметр τ_{n+1} выбирается из условия минимума $\left\|r^{n+1}\right\| = \left\|Ax^{n+1} - f\right\|$ при заданной норме $\left\|r^{n}\right\|$:

$$\tau_{n+1} = \frac{\left(Ar^{n}, r^{n}\right)}{\left\|Ar^{n}\right\|^{2}}, \quad r^{n} = Ax^{n} - f$$

Теорема. *Если А - симметричная положительно определенная матрица, тогда метод минимальных невязок сходится.*

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1 \le i \le m}\left|x_i^{n+1} - x_i^{n}\right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное число.

4.7 Метод скорейшего спуска

Если в формуле (4) итерационный параметр r^{k+1} выбирается из условия минимума $\left\|z_{k+1}\right\|_A = \left\|x^{k+1} - x\right\|_A$, где $\left\|x\right\|_A = \sqrt{(Ax, \quad x)}$ при заданном z_k, то этот метод называется методом скорейшего спуска. Итерационные параметры вычисляются по формуле

$$r^{k+1} = \frac{(r_k, \quad r_k)}{(Ar_k, \quad r_k)}, \qquad r_k = Ax^k - f.$$

Теорема. *Пусть А – симметричная положительно определенная матрица, тогда метод скорейшего спуска сходится.*

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1 \le i \le m}\left|x_i^{n+1} - x_i^{n}\right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное число.

4.8 Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Что означает фраза «итерационные методы»?
3. Перечислите итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Расскажите алгоритм решения систем алгебраических уравнений методом Зейделя.
5. Расскажите алгоритм решения систем алгебраических уравнений методом простых итераций.

6. Расскажите алгоритм решения систем алгебраических уравнений методом итераций.

7. Расскажите алгоритм решения систем алгебраических уравнений методом Якоби.

5 Интерполяция и экстраполяция

Аппроксимация, или приближение, - это замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). В теории чисел изучаются диофантовы приближения, в частности приближения иррациональных чисел рациональными. В геометрии рассматриваются аппроксимации кривых ломаными линиями.

Аппроксимацией (приближением) функции f(x) называется нахождение такой функции g(x) (аппроксимирующей функции), которая была бы близка к заданной. Критерии близости функций f(x) и g(x) могут быть различными.

В том случае, когда приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют точечной или **дискретной**. В том случае, когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), то аппроксимация называется непрерывной или **интегральной**. Примером такой аппроксимации может служить разложение функций в ряд Тейлора, т.е. замена некоторой функции многочленом.

Например, - для приближенного вычисления интеграла используется формула прямоугольников или формула трапеций, или более сложная квадратурная формула. Фактически при этом происходит приближение подынтегральной функции ступенчатой функцией или вписанной ломаной;

- для вычисления значений сложной функции часто используют вычисление значения отрезка ряда, аппроксимирующего функцию (рисунок 5:

a- решение найти можно; б – решение найти нельзя;1 – функция, экстремум которой ищется; 2 – аппроксимирующая парабола первого этапа, построенная по точкам x_1 , x_2 , x_3; 3 – аппроксимирующая парабола второго этапа, построенная по точкам x_1, x_2, x_3, x_4; x_3 – середина исходного интервала; x_2, x_4 – точки максимума первой параболы; x_5 - точка максимума второй параболы).

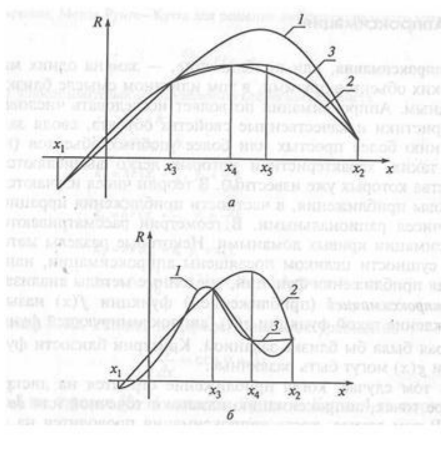

Рисунок 5 – Иллюстрация метода параболической аппроксимации

Интерполяция – способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. В научных и инженерных расчетах часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путем или методом случайной выборки. Как правило, на основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения.

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Существует также близкая к интерполяции задача, которая заключается в аппроксимации какой – либо сложной функции другой, более простой. Если некоторая функция слишком сложна для производительных вычислений, то можно попытаться вычислить ее значения в нескольких точках, а по ним построить, т.е. интерполировать, более простую функцию. Упрощение функции не позволяет получить такие же точные результаты, какие давала бы первоначальная функция, но в некоторых классах задач достигнутый выигрыш в простоте и скорости вычислений может превысить получаемую погрешность в результатах.

Пусть задан дискретный набор точек x_i $(i = 0,1,2,\ldots n)$, называемых *узлами интерполяции*, причем среди этих точек нет совпадающих, а также значения функции y_i в этих точках. Требуется построить функцию $g(x)$, проходящую через все данные узлы. Такая функция получила название интерполяционный полином (многочлен). В том случае, если полином един для всей области интерполяции, говорят, что интерполяция **глобальная**. В тех случаях, когда между различными узлами полиномы различны, говорят о *кусочной* или *локальной интерполяции*. Найдя интерполяционный полином, можно значения функции между ее заданными значениями, а также определить значение функции даже за пределами заданного интервала (провести экстраполяцию).

5.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть дана таблица значений 7 некоторых данных.

Таблица 7 – Исходные данные

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Требуется составить полином $y = f(x)$ степени $m \le n-1$, который принимал бы заданные значения y_i при соответствующих значениях

x_i, $т.е.\ y_i = f(x_i)(i = 1,2,\ldots,n)$. Иными словами, график этого полинома должен проходить через заданные n точек $M_i(x_i; y_i)$.

Обозначим через $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$ вспомогательный многочлен $n - й$ степени, в котором x_i - заданные табличные значения аргумента. Тогда имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\frac{y_1 * \varphi(x)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \\
&+ \frac{y_2 * \varphi(x)}{(x - x_2)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} + \ldots + \\
&+ \frac{y_n * \varphi(x)}{(x - x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Это и есть *интерполяционный полином Лагранжа*.

5.2 Интерполяционная формула Ньютона

Пусть $y_0, y_1, y_2\ldots$ - значения некоторой функции $y = (x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0, x_1, x_2, \ldots (т.е.\ x_{k+1} - x_k = \Delta x_k = const)$.

Введем обозначения:

$y_1 - y_0 = \Delta y_0$, $y_2 - y_1 = \Delta y_1, \ldots, y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$ - разности первого порядка данной функции;

$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$, $\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \ldots$ - разности второго порядка;

$\Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = \Delta^{n+1} y_0$, $\quad \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1 = \Delta^{n+1} y_1, \ldots$ - разности $(n+1)$ - го порядка.

Производя последовательные подстановки, получим:

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$, $\quad \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \ldots$

$$\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k * C_n^k * y_{n-k}.$$

Подобным образом получаем:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \ldots$

$$y = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k y_0 = (1 + \Delta)^n * y_0 = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{21}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0. (*)$$

Запишем таблицу разностей:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & \Delta y_0 & & & \\
 & & & \Delta^2 y_0 & & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
 & & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
 & & & \Delta^2 y_2 & & \\
x_4 & y_4 & \Delta y_3 & & &
\end{array}
$$

K K K K K K K K K K K

Если в формуле (*) положить, что n - не только целое и положительное число, а может быть любым $n = t$, то получим интерполяционную формулу Ньютона

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \mathrm{K} + \Delta^t y_0.$$

Мы получили такую функцию от t, которая обращается при $t = 0$ *в* $y_{0,}$ *при* $t = 1$ *в* y_1, *при* $t = 2$ *в* y_2 *и т.д*. Поскольку последующее значение аргумента при постоянном шаге h определяется формулой $x_n = x_0 + nh,\ \text{то}\ n = \dfrac{x_n - x_0}{h}$. Тогда, полагая $x = x_0 + th,\ \text{то}\ t = \dfrac{x - x_0}{h}$, приведем формулу (*) к виду

$$y_n = y +_0 \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + \mathrm{K}\,. \qquad (25)$$

5.3 Решение типовых примеров

Пример № 23. Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице значений 8.

Таблица 8 –Исходные данные примера № 21

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Решение.

Вспомогательный многочлен имеет вид $\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x:

$\varphi'(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) +$
$+ (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-3);$
$\varphi'(1) = -6, \quad \varphi'(2) = 2, \quad \varphi'(3) = -2, \quad \varphi'(4) = 6.$

При нахождении производной использовано правило:
(u·v·p·t)' = u'·v·p·t + u·v'·p·t + u·v·p'·t + u·v·p·t'.
Тогда полином Лагранжа примет вид:

$$f(x) = \frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) +$$
$$+ \frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x+1.$$

Таким образом, в данном случае интерполяционный полином есть линейная функция $f(x) = x+1$.

Пример № 24. Найти уравнение параболы, проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6;5), (8; 4), (10; 1).

Решение. Вспомогательный многочлен $\varphi(x) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)$. Вычислим:

$\varphi'(x) = (x-4)(x-6)(x-8)(x-10) + (x-2)(x-6)\times$
$\times (x-8)(x-10) + (x-2)(x-4)(x-8)(x-10) +$
$+ (x-2)(x-4)(x-6)(x-10) + (x-2)(x-4)(x-6)(x-8);$

$\varphi'(2) = 384, \quad \varphi'(4) = -96, \quad \varphi'(6) = 64,$
$\varphi'(8) = -96, \quad \varphi'(10) = 384.$

тогда

$f(x) = \frac{0}{384}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10) + \frac{3}{-96}(x-2)\times$
$\times (x-6)(x-8)(x10) + \frac{8}{64}(x-2)(x-4)(x-8)(x-10) -$
$- \frac{6}{96}(x-2)(x-4)(x-6)(x-10) + \frac{0}{384}(x-2)(x-4)\times$
$\times (x-6)(x-8) = \frac{1}{32}\left(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640\right)$

Следовательно, искомой будет парабола четвертого порядка

$$y = \frac{1}{32}\left(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640\right).$$

Пример № 25. Из таблицы 9 значений некоторой функции найти значение у при $x = 3{,}1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

Таблица 9 – Исходные данные примера № 23

x	1	2	3	4	5	6	7

y	3	7	13	21	31	43	57

Решение. Составляем таблицу 10 разностей.

Таблица 10 –Таблица разностей примера № 23

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3			
2	7	4		
3	13	6	2	0
4	21	8	2	0
5	31	10	2	0
6	43	12	2	0
7	57	14	2	

Здесь $x_0 = 3,\ x = 3{,}1,\ h = 1.$ Тогда $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{3{,}1 - 3}{1} = 0{,}1.$ Напишем интерполяционный многочлен Ньютона для этого случая:

$$y = y_0 + t * \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1*2}\Delta^2 y_0,$$

или

$$y = 13 + 0.1 * 8 + \frac{0{,}1(0{,}1-1)}{2} * 2 = 13{,}71.$$

Следовательно, при $x = 3{,}1\ и\ y = 13{,}71$ интерполяционный многочлен для этой таблицы

$$y = 3 + (x-1) * 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} * 2 = x^2 + x + 1.$$

Пример № 26. Даны десятичные логарифмы чисел:

$\lg 2{,}0 = 0{,}30103$, $\lg 2{,}1 = 0{,}32222$, $\lg 2{,}2 = 0{,}34242$,

$\lg 2{,}3 = 0{,}36173$, $\lg 2{,}4 = 0{,}38021$, $\lg 2{,}5 = 0{,}39794$.

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $\lg 2{,}03$.

Решение. Составим таблицу разностей.

Таблица 11 –Таблица разностей примера № 24

x	$\lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$

2,0 2,1 2,2 2,3 2,4 2,5	0,30103 0,32222 0,34242 0,36173 0,38021 0,39794	2119 2020 1931 1848 1773	– 99 – 89 – 83 – 75	10 6 8	– 4 2	6

Здесь $x_0 = 2{,}0, \quad x = 2{,}03, \quad h = 0{,}1.$ *Тогда* $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{2{,}03 - 2{,}0}{0{,}1} = 0{,}3.$

Отсюда

$$y = y_0 + t * \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 =$$

$$= 0{,}30103 + 0{,}3 * 0{,}02119 + \frac{1}{2} * 0{,}3 * 0{,}7 * 0{,}00099 +$$

$$+ \frac{1}{6} * 0{,}3 * 0{,}7 * 1{,}7 * 0{,}00010 + \frac{1}{24} * 0{,}3 * 0{,}7 * 1{,}7 * 2{,}7 * 0{,}00004 +$$

$$+ \frac{1}{120} * 0{,}3 * 0{,}7 * 1{,}7 * 2{,}7 * 3{,}7 * 0{,}00006 = 0{,}30750\,.$$

Таким образом, $\lg 2{,}03 = 0{,}30750$. Проверяем по пятизначным таблицам логарифмов: $\lg 2{,}03 = 0{,}30750$.

5.3 Вопросы для самоконтроля

1.Сформулируйте определения основных понятий интерполирования (интерполяция, приращение, разность *n –го* порядка, узел).

2. Запишите интерполяционную формулу полинома Лагранжа.
3. Дайте понятие экстраполяции.
4. Запишите интерполяционную формулу Ньютона.
5. Дайте понятие аппроксимации.
6. Найдите в рекомендованных источниках суть интерполирования сплайнами.

6 Численное интегрирование

Многие инженерные задачи, задачи физики, геометрии и многих других областей человеческой деятельности приводят к необходимости вычислять определенные интегралы. Не всегда интегралы можно вычислить по имеющимся формулам или же функция задана графически. В этом случае для вычисления определенных интегралов применяют приближенные формулы, такие как:

- метод прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона и др.

При вычислении интеграла следует помнить, каков геометрический смысл определенного интеграла: численное значение определенного интеграла равно площади криволинейной трапеции (эта тема была рассмотрена в курсе математики).

6.1 Приближенное вычисление определенных интегралов

Формулы прямоугольников

$\int_a^b ydx \approx \frac{b-a}{n}\times(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})$ - с недостатком,

$\int_a^b ydx \approx \frac{b-a}{n}\times(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n)$ – с избытком.

Формула трапеций

$$\int_a^b ydx \approx \frac{b-a}{n}\times(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b ydx \approx \frac{b-a}{3n}\times(y_0+y_{2n}+4\times(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2\times(y_2+y_4+\cdots y_{2n-2}))$$

6.2 Решение типовых примеров

Пример №27. Вычислить $\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ по формулам прямоугольников и трапеций. Оценить погрешности.

Решение.

Разделим отрезок [0,1;0,9] на n равных частей. Тогда h=(b-a)/n = 0,8. Составим таблицу 12 подынтегральных значений функции.

Таблица 12 – Подынтегральные значения функции примера № 25

i	x	$\sqrt{1-x^2}$	$y_i=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
0	0,1	0,99	1,005
1	0,18	0,98	1,017
2	0,26	0,97	1,036
3	0,34	0,94	1,063
4	0,42	0,9	1,102
5	0,5	0,87	1,155
6	0,58	0,82	1,228
7	0,66	0,75	1,331
8	0,74	0,67	1,487
9	0,82	0,57	1,747
10	0,9	0,44	2,294

Теперь вычисляем приближенное значение интеграла по заданным выше формулам.

По формуле прямоугольников с недостатком получаем:

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0,9-0,1}{10}*(1,005+1,017+1,036+1,063+1,102+1,155+$$
$$+1,228+1,331+1,487+1,747)=0,97.$$

По формуле прямоугольников с избытком получаем:

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0,9-0,1}{10}*(1,017+1,036+1,063+1,102+1,155+$$
$$+1,228+1,331+1,487+1,747+2,294)=1,07.$$

По формуле трапеций получаем:

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0,9-0,1}{10}*(\frac{1,005+2,294}{2}+1,017+1,036+1,063+1,102+1,155+1,228+1,331$$
$$+1,487+1,747)=1,03$$

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{0,9-0,1}{30}*(1,005+2,294+4*(1,017+1,063+1,155+1,331+$$
$$+1,747)=1,033.$$

Найдем точное вычисление интеграла :

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin|_{0,1}^{0,9}=\arcsin0,9-\arcsin0,1=64^{\circ}_{,}158-5^{\circ}_{,}739=58^{\circ}_{,}419$$

Теперь переведем градусную меру измерения в радианную по формуле $\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}*\pi$.

$$\int_{0,1}^{0,9}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{58^\circ_,419}{180^\circ}*3{,}14=1{,}019$$

Оценим погрешности по формуле $\delta=\frac{|x-a|}{a}$:

$\delta_1=0{,}047$, $\delta_2=0{,}054$, $\delta_3=0{,}06$, $\delta_4=0{,}0134$.

Пример №28. Вычислить $\int_1^9\frac{dx}{x+9}$ по формулам прямоугольников и трапеций. Оценить погрешности.

Решение.

Разделим отрезок [1;9],при n=4 равных частей. Тогда h=(b-a)/n=2. Составим таблицу 13 подынтегральных значений.

Таблица 13 – Подынтегральные значения функции примера № 26

x_i	x+9	$y=\frac{1}{x+9}$
x_0	10	0,1
x_1	12	0,08
x_2	14	0,07
x_3	16	0,06
x_4	18	0,056

Теперь вычисляем приближенное значение интеграла по заданным выше формулам.

По формуле прямоугольников с недостатком получаем:

$$\int_1^9\frac{dx}{x+9}\approx 2\cdot(0{,}1+0{,}08+0{,}07+0{,}06)=0{,}62.$$

По формуле прямоугольников с избытком получаем:

$$\int_1^9\frac{dx}{x+9}\approx 2\cdot(0{,}08+0{,}07+0{,}06+0{,}056)=0{,}532.$$

По формуле трапеций получаем:

$$\int_1^9\frac{dx}{x+9}\approx 2\cdot\left(\frac{0{,}1+0{,}056}{2}+0{,}08+0{,}07+0{,}06\right)=0{,}576.$$

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_1^9\frac{dx}{x+9}\approx\frac{9-1}{3*4}*(0{,}1+0{,}056+4*(0{,}08+0{,}06)+2*(0{,}07+0{,}056))=0{,}98.$$

Найдем точное вычисление интеграла:

$$\int_1^9\frac{dx}{x+9}=\left|\begin{matrix}t=x+9\\ dt=dx\end{matrix}\right|=\int_{10}^{18}\frac{dt}{t}=(\ln|t|)|_{10}^{18}=\ln 18-\ln 10=2{,}89-2{,}3=0{,}59$$

Оценка точности вычислений.

Найдем относительную погрешность каждого расчета:

$\delta=\frac{|x-a|}{a}$, $\delta_1=0{,}05$, $\delta_2=0{,}11$, $\delta_3=0{,}03$, $\delta_4=0{,}04$.

6.3 Вопросы для самоконтроля

1.Запишите приближенную формулу интегрирования методом прямоугольников с недостатком.

2.Запишите приближенную формулу интегрирования методом прямоугольников с избытком.

3.Запишите приближенную формулу интегрирования методом трапеций.

4 .Запишите приближенную формулу методом парабол.

5. Запишите приближенную формулу интегрирования Симпсона.

6.Найдите в рекомендованных ниже источниках приближенное интегрирование по формулам Гаусса.

7. Какой из приближенных методов более точный?

7 Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Теория дифференциальных уравнений - раздел математики, который занимается изучением дифференциальных уравнений и связанных с ними задач. Ее результаты применяются в естественных науках. Очень часто приходится находить частные решения дифференциальных уравнений. Но процесс решения бывает и затруднительным и длительным, потому рассмотрим некоторые методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

7.1 Метод Эйлера

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ определяет на плоскости так называемое поле направлений, т.е. определяет в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x,y)$, направление интегральной кривой уравнения, проходящей через точку. Допустим, что требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Разделим отрезок $[x_0,x]$ на n равных частей и положим $h-$ шаг изменения аргумента. Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до x_0+h функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0,y_0)$. Тогда имеем $y_1-y_0 \approx h\cdot f(x_0,y_0)$, где y_1 – значение искомой функции, соответствующее значению $x_1 = x_0+h$. Отсюда получаем $y_1 \approx y_0+h\cdot f(x_0,y_0)$. Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции

$$y_2 \approx y_1+h\cdot f(x_1,y_1),$$
$$y_3 \approx y_2+h\cdot f(x_2,y_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{к+1} \approx y_к+h\cdot f(x_к, y_к). \qquad (26)$$

Таким образом, мы можем приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами $M_к(x_к;y_к)$, где

$$x_{к+1} = x_к+\Delta x_к,\ y_{к+1} = y_к+h\cdot f(x_к; y_к).$$

Этот метод называется *методом ломаных Эйлера,* или просто *методом Эйлера.*

7.2 Метод Рунге – Кутта

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y'=f(x,y)$ с начальными условиями $y(x_0)=y_0$. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге-Кутта определяются четыре числа:

$$k_1=h\cdot f(x, y), \qquad k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_2}{2}\right), \qquad k_4=h\cdot f(x+h, y+k_3).$$

Если положить $y(x+h)=y(x)+\Delta y$, то можно доказать, что

$$\Delta y\approx\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4).$$

Получаем такую схему (таблицу 14) вычисления.

Таблица 14 –Расчет Δy

x	y	$k_j=h*f(x, y)$	Добавка
x_0	y_0	k_1	$\Delta y\approx\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_1$	k_2	
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_2$	k_3	
x_0+h	y_0+k_3	k_4	
$x_1=x_0+h$	$y_1=y_0+\Delta y$		

7.3 Метод Адамса

Пусть требуется проинтегрировать уравнение $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Метод Адамса относится к разностным методам приближенного решения.

Он состоит из следующих этапов.

1. Задается некоторый шаг h изменения аргумента x.

2.Исходя из начальных условий $y(x_0) = y_0$, находят следующие три значения искомой функции y(x):

$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h)$, $y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h)$, $y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h)$.

Эти три значения можно получить любым методом, обеспечивающим нужную точность: с помощью разложения функции в ряд, методом Рунге – Кутта и др., но не методом Эйлера ввиду его недостаточной точности.

3. С помощью чисел x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3 вычисляют величины

q_0, q_1, q_2, q_3 по формулам:

$q_0 = h\cdot y'_0 = h\cdot f(x_0,y_0)$, $q_1 = h\cdot f(x_1,y_1)$, $q_2 = h\cdot f(x_2,y_2)$, $q_3 = h\cdot f(x_3,y_3)$.

4. Составляют таблицу 15 конечных разностей величин x и y в виде таблицы.

Таблица 15 – Конечные разности

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
x_4	y_4					
………	……..	………	………	……….	……….	………..
x_n						

4.Зная числа в нижней косой строке, находят Δy_3 по формуле Адамса

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

5.Вычисляют $y_4 = y_3 + \Delta y_3$.

6.Вычисляют $q_4 = h\cdot f(x_4,y_4)$.

7. Составляют следующую косую строку, позволяющую вычислить по формуле Адамса значение Δy_3, а, следовательно, y_5 и так далее.

7.4 Решение типовых примеров

Пример № 29. Найти, используя метод Эйлера, значение функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$, при начальных условиях y(0) = 1, принимая h =0,1. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

Решение.

При h = 0,1 последовательные значения аргумента будут: x_0=0, x_1=1, x_2=0,2, x_3=0,3, ...

Вычисляем соответствующие значения искомой функции:

$$y_1=y_0+h\cdot f(x_0,y_0)=1+0{,}1\cdot\frac{1-0}{1+0}=1{,}1,$$

$$y_2=y_1+h\cdot f(x_1,y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot\frac{1{,}1-0{,}1}{1{,}1+0{,}1}=1{,}183,$$

$y_3=y_2+h\cdot f(x_2,y_2)=1{,}183+0{,}1\cdot\frac{1{,}183-0{,}2}{1{,}183+0{,}2}=1{,}254$,

$y_4=y_3+h\cdot f(x_3,y_3)=1{,}254+0{,}1\cdot\frac{1{,}254-0{,}3}{1{,}254+0{,}3}=1{,}315$.

Таким образом, получаем таблицу 16.

Таблица 16 - Значения искомой функции примера 27

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4
У	1	1,1	1,18	1,25	1,31

Пример № 30. Найти по методу Эйлера четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальных условиях y(0)=1, полагая h=0,1.

Решение.

Значения аргумента будут: $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=0{,}3$. Соответствующие значения y:

$y_1=y_0+h\cdot f(x_0,y_0)=1+0{,}1\cdot(0+1)=1{,}1$;

$y_2=y_1+h\cdot f(x_1,y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot(0{,}1+1{,}1)=1{,}22$;

$y_3=y_2+h\cdot f(x_2,y_2)=1{,}22+0{,}1\cdot(0{,}2+1{,}22)=1{,}36$;

$y_4=y_3+h\cdot f(x_3,y_3)=1{,}36+0{,}1\cdot(0{,}3+1{,}36)=1{,}52$.

Получаем таблицу 17.

Таблица 17 - Значения искомой функции примера 28

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

Пример № 31. Составить таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y'=y-\frac{2x}{y}$, при начальных условиях y(0)=1 в промежутке [0,1] с шагом=0,2 (точное решение $y=\sqrt{2x+1}$).

Решение. Найдем числа: $k_1=h\cdot f(x,y)=0{,}2\cdot(1-\frac{2\cdot 0}{1}=0{,}2)$;

$k_2=h\cdot f(x+\frac{h}{2},y+\frac{\kappa_1}{2})=0{,}2\cdot f(0{,}1;\ 1{,}1)=0{,}2\cdot(1{,}1-\frac{0{,}2}{1{,}1})=0{,}1836$;

$k_3=h\cdot f(x+\frac{h}{2},y+\frac{\kappa_2}{2})=0{,}2\cdot f(0{,}1;\ 1{,}0918)=0{,}1817$;

$k_4=h\cdot f(x+h,y+k_3)=0{,}2\cdot f(0{,}2;\ 1{,}1817)=0{,}1686$;

Отсюда $\Delta y=\frac{1}{6}\cdot(0{,}2+0{,}3672+0{,}3634+0{,}1686)=0{,}1832$

Таким образом, $y_1=1+0{,}1832=1{,}1832$ при x=0,2.

По этой же схеме находим y_2 и т.д. процесс вычисления ведем по такому бланку (таблица 18).

Таблица 18 – Расчет значений функции примера 29

i	x	y	f(x,y)	k_i=h·f(x,y)	Δy
1 2 3 4	0 0,1 0,1 0,2	1 1,1 1,0918 1,1817	1 0,918 0,908 0,843	0,2 0,1838 0,1817 0,1686	0,1832
1 2 3 4	0,2 0,3 0,3 0,4	1,1832 1,2677 1,2626 1,3407	0,8451 0,7944 0,7874 0,7440	0,1690 0,1589 0,1575 0,1488	1,1584
1 2 3 4	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	

Заметим, что y_1=1,1832 и y_2=1,3416 имеют все пять знаков верными, если сравнить с точным решением y = $\sqrt{2x+1}$.

Пример № 32. Методом Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $x^2 \cdot y' - xy = 1$ при начальных условиях y(1)=0 в промежутке [1,2] с шагом h=0,2 (точное решение y=$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$).

Решение.

Здесь f(x,y)=$\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Найдем числа:

$k_1 = h \cdot f(x,y) = 0{,}2 \cdot (\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2}) = 0{,}2$; $k_2 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2}) = 0{,}18$;

$k_3 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}09}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2}) = 0{,}18$;

$k_4 = h \cdot f(x+h, y+k_3) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2}) = 0{,}17$;

$\Delta y = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}18$.

Таким образом, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}18 = 0{,}18$.

Найдем второе значение y:

$k_1 = h \cdot f(x;y) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2}) = 0{,}17$;

$k_2 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}26}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}) = 0{,}15$;

$k_3 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) = 0{,}2 \cdot (\frac{0{,}25}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}) = 0{,}15$;

$k_4=h\cdot f(x+h, y+k_3)=0,2\cdot(\frac{0{,}33}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}4^2})=0,14;$

$\Delta y=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=0,14.$

Следовательно, $y_2 = y_1+\Delta y_1=0{,}18+0{,}15=0{,}33$ и т.д.

Пример № 33. Методом Адамса найти первые четыре члена разложения в ряд уравнения $y' = x^2 + y^2$ в точке y(0,4) при начальных условиях y(0) = -1.

Решение. 1. Запишем ряд Тейлора в окрестности точки x = 0:

$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots .$

2. Вычисляем значения производных в точке x = 0:

$y(0) = -1,$

$y' = x^2 + y^2,\ y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1,$

$y'' = 2x + 2y\,y',\ y''(0) = 2\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1 = -2,$

$y''' = 2 + 2y'^2 + 2y\,y'',\ y'''(0) = 2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot(-1\cdot(-2) = 8.$

Таким образом, $y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots .$

3. Вычисляем значения y(x) в точках $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ (округляя до тысячных): $y_1 = -0{,}909$, $y_2 = -0{,}829$, $y_3 = -0{,}754$.

4. Построим расчетную таблицу 19.

Таблица 19 - Расчет значений решения уравнения

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
$x_0 = 0$	$y_0 = -1$		$q_0 = 0{,}1$			
		$\Delta y_0 = 0{,}901$		$\Delta q_0 = -0{,}017$		
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = -0{,}909$		$q_1 = 0{,}083$		$\Delta^2 q_0 = 0{,}006$	
		$\Delta y_1 = 0{,}080$		$\Delta q_1 = -0{,}011$		$\Delta^3 q_0 = -0{,}002$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = -0{,}829$		$q_2 = 0{,}072$		$\Delta^2 q_1 = 0{,}004$	
		$\Delta y_2 = 0{,}076$		$\Delta q_2 = -0{,}007$		
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = -0{,}754$		$q_3 = 0{,}065$			
$x_4 = 0{,}4$						

5. Вычисляем $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_2 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\cdot\Delta^3 q_0 = 0{,}065 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}007) + \frac{5}{12}\cdot 0{,}004 + \frac{3}{8}\cdot(-0{,}002) = 0{,}062.$

6. Вычисляем $y_4 = y_3 + \Delta y_3 \approx -0{,}754 + 0{,}062 = -0{,}692 \approx -0{,}69.$

Ответ: y_1 = - 0,909; y_2 = - 0,829; y_3 = - 0,754; y_4 = - 0,69.

7.5 Вопросы для самоконтроля

1. Расскажите порядок нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений методом Эйлера.
2. Расскажите порядок нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутта.
3. Расскажите порядок нахождения приближенного решения дифференциальных уравнений методом Адамса.
4. Проведите сравнительный анализ методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

8 Простейшие способы обработки данных

8.1 Способ средних

Способ средних основывается на допущении, что наиболее подходящей линией будет та, для которой **алгебраическая сумма уклонений равна нулю**.

Алгоритм способа средних.

1. Записать эмпирическую формулу в общем виде.
2. Подставить в эту формулу все пары наблюдавшихся или замеренных значений x и y.
3. Посчитать уклонения (вертикальные расстояния от данных точек до графика функции).
4. Распределить уклонения по группам, составляя столько групп, сколько неизвестных параметров эмпирической формулы надо найти.
5. Приравнять к нулю сумму уклонение по каждой группе (получится система уравнений).
6. Решить систему уравнений.
7. Составить эмпирическую формулу.

Пример № 34. Найти способом средних формулу вида $\mathbf{S = A\cdot t^{\alpha}}$, отвечающую таблице 20.

Таблица 20 – Исходные данные примера 32

t	273	283	288	293	313	333	353	373
S	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

Решение.

1. Формула дана.
2. Значения t и S известны.
3. Формула для подсчета уклонений $\boldsymbol{\delta = A\,t^{\alpha} - S}$. Подставляя значения t и S из таблицы и приравнивая уклонения к нулю, получаем систему показательных уравнений, решение которой относительно параметров A и α затруднительно. Без большой потери точности приравняем к нулю сумму уклонений логарифма S, т.е. $\boldsymbol{\delta' = \lg A + \alpha\cdot \lg t - \lg S}$.
4. Уклонения выразятся формулами:

1 – ая группа $\delta_1' = \lg A + 2{,}4362\alpha - 1{,}4683$,

$\delta_2' = \lg A + 2{,}4518\alpha - 1{,}5224$,

$\delta_3' = \lg A + 2{,}4594\alpha - 1{,}5465$,

$\delta_4' = \lg A + 2{,}4699\alpha - 1{,}5705$.

2 – ая группа $\delta_5' = \lg A + 2{,}4955\alpha - 1{,}6609$,

$\delta_6' = \lg A + 2{,}5224\alpha - 1{,}7419$,

$\delta_7' = \lg A + 2{,}5478\alpha - 1{,}8169$,

$\delta_8' = \lg A + 2{,}5717\alpha - 1{,}8882$.

5. Приравниваем к нулю суммы уклонений по группам 1 и 2 , получаем систему двух уравнений для определения параметров A и α:

$$\begin{cases} 4\lg A + 9{,}8143\alpha = 6{,}1077, \\ 4\lg A + 10{,}1374\alpha = 7{,}107. \end{cases}$$

6. Решение системы: $\alpha = 3{,}096$, $A = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$.
7. $S = 8{,}5 \cdot 10^{-7}\, t^{3{,}096}$.

8.2 Графический способ

Пусть данные опыта представлены таблицей. Через точки, определяемые этой таблицей или близкие к ним, проводим график и по виду графика подбираем вид эмпирической формулы функции. Наипростейшим является тот, для которого данные опыта приводят к точкам, располагающимся приблизительно на прямой $\mathbf{y = a_0 + a_1x}$, или на кривых, уравнения которых $\mathbf{S = A\,t^{\alpha}}$ и $\mathbf{S = A\,e^{\alpha t}}$ преобразуются заменой переменных к линейной функции. Решая эту задачу графическим способом, мы наносим на координатную сетку (с равномерной или логарифмической шкалой) и проводим прямую приблизительно через эти точки так, чтобы она лежала возможно ближе к каждой из нанесенных точек. Затем берем две произвольные точки этой прямой (возможно дальше одна от другой) и координаты их подставляем в линейную функцию $\mathbf{y = a_0 + a_1x}$. Из полученных таким образом двух уравнений находим a_0 и a_1.

Пример № 35. Стационарное распределение температуры в теплоизолированном тонком стержне описывается линейной функцией $\mathbf{y = a_0 + a_1x}$. Определить постоянные a_0 **и** a_1, имея таблицу 21 измеренных температур в соответствующих точках стержня.

Таблица 21 – Значения температур

x	0	2	6	8	10	14	16	20
y	32	29,2	23,3	19,9	17,2	11,3	7,8	2

Решение. Построив приведенные в таблице точки, видим, что прямая проходит через точки (0;32) и (20;2).

Поставим их координаты в уравнение $\mathbf{y = a_0 + a_1x}$.

Получаем систему $\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 = 32, \\ a_0 + 20 \cdot a_1 = 2. \end{cases}$

Очевидно (из первого уравнения), что $a_0 = 32$.

Подставляем значение $a_0 = 32$ во второе уравнение системы:

$32 + 20 \cdot a_1 = 2$, $a_1 = -1{,}5$.

Отсюда $\mathbf{y = 32 - 1{,}5x}$.

Проанализируем соответствие формулы табличным данным. Для этого найдем величины суммы уклонений **δ** и суммы квадратов уклонений значений функции по формуле и таблице.

δ = - 1,5x +32 –y.

$\delta_1 = -1{,}5 \cdot 0 + 32 - 32 = 0$, $\delta_2 = -1{,}5 \cdot 2 + 32 - 29{,}2 = -0{,}2$,

$\delta_3 = -1{,}5 \cdot 6 + 32 - 23{,}3 = -0{,}3$, $\delta_4 = -1{,}5 \cdot 8 + 32 - 19{,}9 = 0{,}1$,

$\delta_5 = -1{,}5 \cdot 10 + 32 - 17{,}2 = -0{,}2$, $\delta_6 = -1{,}5 \cdot 14 + 32 - 11{,}3 = -0{,}3$,

$\delta_7 = -1{,}5 \cdot 16 + 32 - 7{,}8 = 0{,}2$, $\delta_8 = -1{,}5 \cdot 20 + 32 - 2 = 0$.

$\sum_{i=1}^{\delta} \delta_i = -0{,}7$; $\sum_{i=1}^{\delta} \delta_i^2 = 0.31$.

Пример № 36. Приведенные ниже табличные (таблица 22) данные отвечают формуле $\mathbf{S = A\,t^{\alpha}}$.

Таблица 22 – Исходные данные примера 34

t	1	2	3	4	5	6	7
S	2,31	2,58	2,77	2,93	3,06	3,16	3,26

Найти значения A и α.

Решение. Прологарифмируем уравнение $S = A\,t^{\alpha}$:

lg S = lg A + α· lg t

Полагая lg S = y, lg t = x, lg A = a_0, α = a_1 имеем

y = $a_0 + a_1$x.

Графиком полученного уравнения будет прямая линия, параметры уравнения которой получим, взяв две точки на этой прямой, например, (lg 1; lg 2,31) и , (lg 7; lg 3,26).

Подставив координаты этих точек в уравнение y = lg A + α x, получим

$$\begin{cases} \lg 2{,}31 = \lg A + \alpha \cdot \lg 1, \\ \lg 3{,}26 = \lg A + \alpha \cdot \lg 7, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lg A = 0{,}364, \\ \lg A + \alpha \cdot 0{,}845 = 0{,}513, \end{cases}$$

отсюда lg A = 0,364, A = 2,312;

$0{,}364 + \alpha \cdot 0{,}845 = 0{,}513$, $\alpha = \frac{0{,}149}{0{,}845} = 0{,}176$.

Следовательно, $\mathbf{S = 2{,}312\, t^{0{,}176}}$.

8.3 Подбор параметров по способу наименьших квадратов

На практике часто приходится решать такую задачу. Для двух функционально связанных величин x и y известны n пар соответствующих значений $(x_1; y_1)$, $(x_2; x_2)$, … $(x_n; y_n)$. Требуется в наперед заданной формуле

$y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$

определить m параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ ($m < n$) так, чтобы в эту формулу наилучшим образом «укладывались» бы известные n пар значений x и y.

Считается (исходя из принципов теории вероятности), что наилучшими будут те значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, которые обращают в минимум сумму $\sum_{k=1}^{k=n}[f(x_k, \alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha_m) - y_k]^2$ (т.е. сумму квадратов отклонений значений y, вычисленных по формуле, от заданных, поэтому сам способ и получил название **способа наименьших квадратов**).

Это условие даёт систему m уравнений, из которых определяются $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$:

$$\sum_{k=1}^{k=n}[f(x_k, \alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha_m) - y_k] * \frac{\partial_f\, \alpha 1, \alpha 2, \dots \alpha m}{\partial_\alpha} = 0., \qquad (27)$$

$$(f = 1,2, \dots, m).$$

На практике заданную формулу $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$ иногда приходится (в ущерб строгости получения решения) преобразовывать к таком виду, чтобы систему (27) было проще решать (смотрите ниже подбор параметров в формулах $y=A\cdot e^{cx}$ и $y=A\cdot x^q$).

Частные случаи.

1) $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots a_m$ (m+1 параметров $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m; n > m+1$).

Система (27) принимает следующий вид

$$a_0 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m + a_1 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{m-1} + \dots + n * a_m = \sum_{k=1}^{k=n} y_k\,,$$

$$a_0 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + a_1 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m + \dots + n * a_m * \sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k\,,$$

$$a_0 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{m+2} + a_1 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + \dots + a_m * \sum_{k=1}^{k=n} x^2{}_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 y_k\,, \qquad (28)$$

…………………………………………………………………………………

$$a_0 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{2m} + a_1 * \sum_{k=1}^{k=n} x_k^{2m-1} + \dots + a_m * \sum_{k=1}^{k=n} x^m{}_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m y_k\,.$$

Эта система (из m+1 уравнений с m+1 неизвестными) всегда имеет единственное решение, так как её определитель отличен от нуля.

Для определения коэффициентов системы (28) удобно составить вспомогательную таблицу 22 следующего вида.

Таблица 22 – Расчет коэффициентов системы (28)

k	x_k	x_k^2	x_k^3	…	x_k^{2m}	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$	…	$x_k^m y_k$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	…	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$	…	$x_1^m y_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	…	x_2^{2m}	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$	…	$x_2^m y_2$
.	..	..	..	…	..	..	..	..	…	..
.	..	..	..	…	..	..	..	..	…	..
n	x_n	x_n^2	x_n^3	…	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$	…	$x_n^m y_n$
$\sum$										

В последней строке записываются суммы элементов каждого столбца, которые и являются коэффициентами системы (28).

Решается система (28) обычно методом Гаусса или методом определителей.

2) $y = A \cdot e^{cx}$.

Для упрощения системы эта формула, связывающая x и y, предварительно логарифмируется и заменяется формулой

lg y = lg A + c ·x· lg e.

Система (28) примет следующий вид:

$$\begin{cases} c \cdot lge \cdot \sum_{k=1}^{k=n} x_k + n \cdot lgA = \sum_{k=1}^{k=n} lgy_k\ , \\ c \cdot lge \cdot \sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 + lgA \cdot \sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k \cdot lgy_k\ . \end{cases}$$

Расчеты записываем во вспомогательную таблицу (23) .

Таблица 23 – Вспомогательная таблица

k	x_k	x_k^2	$lg\ y_k$	$x_k \cdot lg\ y_k$
1	x_1	x_1^2	$lg\ y_1$	$x_1 \cdot lg\ y_1$
2	x_2	x_2^2	$lg\ y_2$	$x_2 \cdot lg\ y_2$
.	..	..	..	..
n	x_n	x_n^2	$lg\ y_n$	$x_n \cdot lg\ y_n$
$\sum$				

Из системы (28) определяются c и $lg\ A$.

3) $y = Ax^q$.

Эта формула также предварительно логарифмируется и заменяется следующей:

lg y = lg A + q· lg x.
Система (28) примет следующий вид:

$$\begin{cases} q\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} lg\, x_k + n\cdot lgA = \sum\limits_{k=1}^{k=n} lgy_k\ , \\ q\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} lg^2\ x_k + \ lgA\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} lgx_k \ = \sum\limits_{k=1}^{k=n} lgx_k\ \cdot lgy_k\,. \end{cases}$$

Соответствующим образом изменяется и вспомогательная таблица.

Пример № 37. Подобрать по способу наименьших квадратов для заданных значений (таблица 24) x и y квадратичную функцию $\varphi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$.

Таблица 24 – Исходные данные примера №35

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9.4	9,5	9,5	9,4

Решение. Составим таблицу 25.

Таблица 25 – Расчетные значения коэффициентов системы примера №35

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	x_ky_k	$x_k^2y_k$
1	7	49	343	2401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331	14641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1728	20736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28561	9,4	122,2	1588,8
$\sum$	70	728	7840	87096	62,7	635,6	6683,4

Отсюда имеем систему уравнений:
$728a_0 + 70a_1 + 7a_2 = 62{,}7,$
$7840a_0 + 728a_1 + 70a_2 = 635{,}6,$
$87096a_0 + 7840a_1 + 728a_2 = 6683{,}4.$
Решая эту систему, получим a_0= -0,04, $a_1 = 1{,}1, a_2 = 2{,}12$. Таким образом, квадратичная функция имеет вид: $\varphi(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}1x + 2{,}12$.

8.4 Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите простейшие способы обработки данных.
2. В чем заключается суть способа средних?
3. Расскажите алгоритм способа средних.
4. В чем заключается графический метод обработки данных?
5. Дайте определение экстремума функции.
6. Перечислите виды экстремумов.
7. В чем заключается метод наименьших квадратов?
8. Запишите общий вид системы с параметрами для линейной функции.
9. Запишите общий вид системы с параметрами для квадратичной функции.

9 Итоговое тестирование

9.1 Тестовые задания

Задание 1 (выберите один вариант ответа).

Если число 3,2 округлить до 3, тогда абсолютная погрешность полученного приближенного числа будет равна …

Варианты ответа:

1) -0,2; 2) 0,2; 3)-0,8; 4) 0,8.

Задание 2 (выберите один вариант ответа).

Если число 2,5 округлить до 3, тогда относительная погрешность полученного приближенного числа будет равна…

Варианты ответа:

1) -0,5; 2) 0,2; 3) -0,2; 4) 0,5.

Задание 3

Расположите в порядке возрастания относительных погрешностей числа …

Варианты ответа:

1) $a_1 = 25 \pm 0{,}03$; 2) $a_2 = 2{,}1 \pm 0{,}2$;

3) $a_3 = 149 \pm 0{,}007$; 4) $a_4 = 98 \pm 0{,}1$.

Задание 4 (выберите один вариант ответа).

Абсолютная погрешность округления с избытком числа 1,8 до ближайшего целого числа равна…

Варианты ответа:

1) 0; 2) -0,2; 3) 0,2; 4) 0,1.

Задание 5 (выберите один вариант ответа).

Первое приближение к значению корня уравнения $x^3+4x-1=0$, расположенное на отрезке [0,1] полученное методом хорд по формуле $x=a$ - $\frac{(b-a)*f(a)}{f(b)-f(a)}$, где a и b концы отрезка $[a:b]$ равно …

Варианты ответа:

1) 1,2; 2) 0,2 ; 3) 0,5; 4) -0,2.

Задание 6 (выберите один вариант ответа).

Приближенное значение интеграла $\int_0^b x dx$, вычислить по формуле прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

при h=1 и при n=5, равно …

Варианты ответа:

1) 15; 2) 10; 3) 12,5; 4) 5.

Задание 7 (выберите один вариант ответа).

Приближенное значение интеграла $\int_0^b x dx$, вычислить по формуле прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n))$$

при h=1 и при n=5, равно …

Варианты ответа:

1) 15; 2) 10; 3) 12,56; 4) 5.

Задание 8 (выберите один вариант ответа).

При начальном значении переменных $x_1^0=1$, $x_2^0=1$, $x_3^0=1$ первое приближенное решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 = 6 - 0{,}2x_2^0 - 0{,}8x_3^0 \\ x_2 = 5 - 0{,}5x_1^0 - 0{,}5x_3^0 \\ x_3 = 4 + 0{,}6x_1^0 + 0{,}4x_2^0 \end{cases}$ равно …

Варианты ответа:

1) $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$; 2) $x_1 = 6$, $x_2 = 6$, $x_3 = 6$;

3) $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ $x_3 = 5$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$.

Задание 9 (выберите один вариант ответа).

Если последовательные приближенные значения функций, заданным дифференциальным уравнением $y'=f(x,y)$, находится по методу Эйлера $y_{k+1}=y_k+h*f(x_y;y_k)$, то y_1 определяемое уравнением $y'=2x+y$, при y_0=1, x_0=2 и шаге h=0,1 равно …

1) 0,5; 2) 2,5 ; 3) 1,5 ; 4) 1,1.

Задание 10 (выберите один вариант ответа).

По таблице значений функций составлена таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0 1 2	3 5 8	2 2	0

Тогда приближенное значение производной функции $f'=\frac{1}{n}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots)$, где $t=\frac{x-x_0}{h}$, в точке $y_{k+1}=y_k+h*f(x_k;y_k)$ при x=0,5 равно …

Варианты ответа:

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 4.

9.2 Ответы к тестовым заданиям

Задание 1. Ответ: 2.
Задание 2. Ответ: 2.
Задание 3. Ответ: a_3 ,a_4 ,a_1 ,a_2.
Задание 4. Ответ: 3.
Задание 5. Ответ: 2.
Задание 6. Ответ: 2.
Задание 7. Ответ: 1.
Задание 8. Ответ: 3.
Задание 9. Ответ: 3.
Задание 10. Ответ: 4.

9.3 Методические указания к решению тестовых заданий

Решение задания 1.

Абсолютная погрешность округления числа x до a находится по формуле

$\alpha=|x-a|$. по условию x= 3,2 , a=3 =>$|3,2-3|$=0,2.

Поэтому ответ 2.

Помните, что абсолютная погрешность является положительным числом, поэтому при выборе ответа отбрасываются отрицательные числа.

Решение задания 2.

Относительная погрешность находится по формуле $\delta=\frac{\alpha}{a}$.

$\alpha=|2,5-3|=0,5 \Rightarrow \delta=\frac{0,5}{2,5}=0,2$.

Помните, что относительная погрешность является положительным числом, поэтому при выборе ответа отбрасываются отрицательные числа.

Решение задания 3.

Вычисляем относительные погрешности чисел:

$$\frac{0,03}{25}=0,0012;\ \frac{0,2}{2,1}=0,095;\ \frac{0,007}{149}=0,0000469;\ \frac{0,1}{98}=0,00102$$

Поэтому ответ будет выглядеть так: a_3 ,a_4 ,a_1 ,a_2.

Решение задания 4.

Округляем число 1,8 до ближайшего целого числа, т.е. до 2. Тогда абсолютная погрешность

$\alpha=|1,8-2|=0,2$

Ответ: 3.

Решение задания 5.

По условию корень принадлежит отрезку [0;1], поэтому a=0, b=1. $f(x)=x^3+4x-1$, $f(0)=-1$, $f(1)=4$. Находим первое приближение x по указанной формуле: $x=0-\frac{(1-0)*(-1)}{4-(-1)}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

Ответ: 2.

Решение задания 6.

На решение задания по заданной формуле уйдет много времени. Найдем точное значение интеграла по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_0^5 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^5=\frac{5^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{25}{2}-0=12{,}5$. В этом задании указана формула прямоугольников с недостатком. Поэтому ответом будет число меньшее 12,5, но близкое к нему: 10.

Ответ: 2.

Решение задания 7.

В этом задании указана формула прямоугольников с избытком. Рассуждая аналогично **заданию 6**, приходим к выводу, что ответом будет число больше 12,5, но близкое к нему: 15.

Ответ: 1.

Решение задания 8.

Подставим указанные значения x_i^0 в систему уравнений и вычисляем x_1, x_2, x_3:

$x_1=6-0{,}2\cdot1-0{,}8\cdot1=5$,

$x_2=5-0{,}5\cdot1+0{,}5\cdot1=5$,

$x_3=4+0{,}6\cdot1+0{,}4\cdot1=5$.

Поэтому верный ответ 3.

Решение задания 9.

По формуле $y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k;y_k)$ составим формулу для нахождения y_1:

$y_k=y_0+h\cdot f(x_0;y_0)$.

Т.к. $y'=f(x;y)$, по условию $y'=2x+y$, то $f(x;y)=2x+y \Rightarrow f(x_0;y_0)=2\cdot2+1=5$ ($y_0=1$, $x_0=2$).Подставим в формулу y_k значения $y_0=1$, $h=0{,}1$, и $f(x_0;y_0)=5$. Получаем $y_1=1+0{,}1\cdot5=1+0{,}5=1{,}5$.

Ответ: 3.

Решение задания 10.

$x=0{,}5$. Представим его в виде x_0+h. Получим $x=0+0{,}5$, значит, $x_0=0$, $h=0{,}5$. Вычисляем t: $t=\frac{0{,}5-0}{0{,}5}=1$.

По таблице разностей $\Delta y_0=2$, $\Delta^2 y_0 = 0$ подставляем h, Δy_0, t и $\Delta^2 y_0$ в формулу

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots\right)$$

Тогда $f'(0,5)=\frac{1}{0,5} * \left(2 + \frac{2*1-1}{2} * 0\right) = 2 * 2 = 4.$

Ответ: 4.

Заключение

Информационные и коммуникационные технологии решительно вторгаются в научно – практическую и образовательную деятельность. Стремительно повышаются требования к уровню подготовки в этой сфере специалистов различных областей. В этой связи изменяется программа обучения, во всей общей степени, отражающая прикладной, практический подход к применению знаний. Возрастает роль дисциплины «Численные методы», которая развивает идеи численного решения задач, возникающих в процессе компьютерного математического моделирования реальных явлений в различных предметных сферах.

Теория приближенного решения математических задач постоянно пополняется все более совершенными численными методами, появление которых стимулируется как особенностями машинной математики, так и расширением функциональных возможностей прикладных программных средств. Все это требует определенного уровня понимания, который необходимо обеспечить при обучении численным методам. Понятия о приближенных методах решения прикладных задач подготавливают студентов к разработке и применению с помощью ПЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе познания и использования в практической деятельности законов реального мира, посредством математического моделирования.

Список использованных источников

Основные источники:

1 Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 392 с. — ISBN 978-5-8114-4549-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/133925). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Дополнительные источники:

2 Численные методы : учебное пособие : [16+] / П.К. Корнеев, Е.О. Тарасенко, А.В. Гладков, М.А. Дерябин ; Министерство науки и высшего образования РФ, Северо-Кавказский федеральный университет. – Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2018. – Ч. 2. – 107 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=562830

3 Численные методы : лабораторный практикум / авт.-сост. Г.И. Шевченко, Т.А. Куликова ; Северо-Кавказский федеральный университет. – Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2016. – 107 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457891

Интернет – ресурсы:

4 http: // www.math test.ru.

5 http: // www.webmath.ru.

6 http: // e - scince.ru.

7 http: // mathem lib.ru.